

1) W literaturze stosuje się różne oznaczenia dla wymienionych współczynników, np. w podstawowych monografiach Hubera [1] i Lechnickiego [7] stosuje się a_{ij} . Aby uniknąć kolizji z oznaczeniami dostaw kierunkowych przyjęto oznaczenia b_{ij} , jak w podręczniku Krzysia i Życzkowskiego [5].

2) Istotniejsze niż wybór liter jest stwierdzenie, że współczynniki b_{ij} nie są bezwymiarowe, gdyż z (5.1) wynika ich wymiar:

$$[b_{ij}] = 1/(\text{Nm}^{-2}) = \text{N}^{-1}\text{m}^2 \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \dots, 6. \quad (5.5)$$

Liczba niezależnych współczynników b_{ij} ulega dalszej redukcji jeśli weźmiemy pod uwagę strukturę ciał sprężystych, wyrażającą się tzw. *stałymi sprężystości*. Należy przypomnieć, że w wytrzymałości materiału jednorodnego i izotropowego, do analizy jego odkształceń wystarczą dwie stałe sprężystości, np. moduł Younga E i współczynnik Poissona ν .

5.2. Stałe sprężystości dla materiałów o różnych właściwościach

Stopień odkształcenia ciała możemy mierzyć za pomocą zmiany wartości energii wewnętrznej, nazywanej *energią sprężystą*, którą dla jednostkowej objętości nazywamy *energiją właściwą* (gęstość energii) lub *potencjałem sprężystym*:

$$\Phi = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \dots + \tau_{xy} \gamma_{xy}). \quad (5.6)$$

Energiją sprężystą zajmiemy się dokładniej dalej, w oddzielnej części tego rozdziału. Tutaj tylko podstawimy związki (5.1) do (5.6). Otrzymujemy w ten sposób energię właściwą wyrażoną przez naprężenia:

$$\Phi = \frac{1}{2} b_{11} \sigma_x^2 + b_{12} \sigma_x \sigma_y + \dots + b_{16} \sigma_x \tau_{xy} + \frac{1}{2} b_{22} \sigma_y^2 + \dots + b_{26} \sigma_y \tau_{xy} + \frac{1}{2} b_{66} \sigma_x \tau_{xy}^2. \quad (5.7)$$

W (5.7) występuje 21 *niezależnych parametrów*, które spełniają warunek symetrii $b_{ij} = b_{ji}$. Symetria tych współczynników wynika z przemienności mnożników we wzorze na energię właściwą (5.7):

$$b_{12} \sigma_x \sigma_y = b_{21} \sigma_y \sigma_x, \quad b_{26} \sigma_y \tau_{xy} = b_{62} \tau_{yx} \sigma_y \quad \text{itd.}$$

Dalsze symetrie wynikają ze struktury materiału i zostały zbadane m.in. na podstawie symetrii struktury kryształów. Materiały konstrukcyjne oprócz *jednorodności właściwości fizycznych* (stałe sprężystości są jednakowe w każdym punkcie ciała) mają właściwości *anizotropowe*. Oznacza to, że stałe sprężystości zmieniają się wzdłuż wyróżnionych kierunków. Kierunki anizotropii wynikają m.in. z procesów tworzenia materiału (słoje drewna, walcowanie blach, kierunek układania zbrojenia w kompozytach itp.).

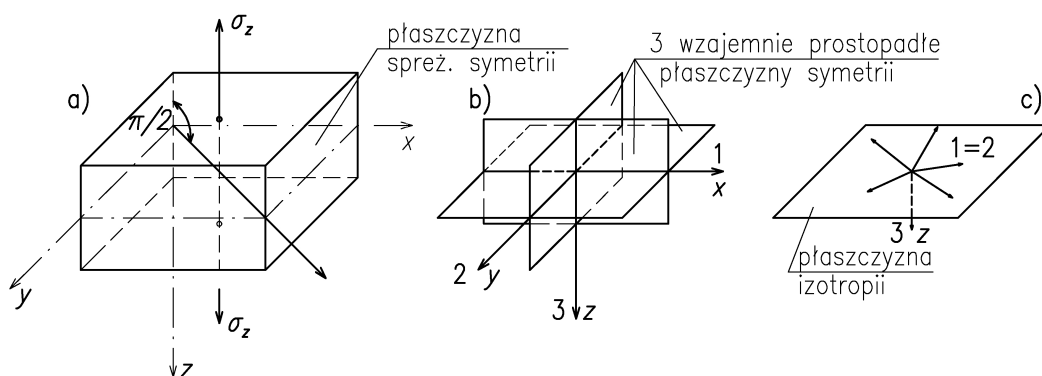
5.3. Podstawowe przypadki sprężystej symetrii

1. Płaszczyzna sprężystej symetrii. Symetria sprężysta, związana ze strukturą materiału, powoduje zerowanie się 8 parametrów. Jeśli płaszczyzna (x, y) o normalnej z , por. Rys. 5.1a, będzie płaszczyzną symetrii to zerują się następujące parametry:

$$b_{14} = b_{24} = b_{34} = b_{46} = b_{15} = b_{25} = b_{35} = b_{56} = 0, \quad (5.8)$$

co prowadzi do następującej macierzy podatności z 13-toma niezależnymi składowymi:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & b_{16} \\ & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & b_{26} \\ & & b_{33} & 0 & 0 & b_{36} \\ & & & b_{44} & b_{45} & 0 \\ & \text{symetria} & & & b_{55} & 0 \\ & & & & & b_{66} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$



Rys. 5.1: a) Płaszczyzna sprężystej symetrii, b) Płaszczyzny ortotropii, c) Płaszczyzna izotropii.

W przypadku osiowego rozciągania/ściskania z naprężeniem σ_z , prostopadłym do płaszczyzny symetrii, odkształcenia będą wynosiły:

$$\varepsilon_x = b_{13} \sigma_z, \quad \varepsilon_y = b_{23} \sigma_z, \quad \varepsilon_z = b_{33} \sigma_z, \quad (5.10)$$

$$\gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{xy} = b_{36} \sigma_z.$$

Wynika stąd, że kąty proste między liniami na płaszczyźnie symetrii i osią z nie ulegają zmianie, gdyż nie występują odkształcenia postaciowe $\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$.

2. Trzy płaszczyzny symetrii materiału ortotropowego. W przypadku trzech wzajemnie ortogonalnych płaszczyzn symetrii, por. Rys. 5.1b, oprócz parametrów (5.8) zerują się dodatkowo 4 parametry podatności

$$b_{16} = b_{26} = b_{36} = b_{45} = 0, \quad (5.11)$$

co prowadzi do następującej macierzy podatności:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & b_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & b_{44} & 0 & 0 \\ & \text{symetria} & & & b_{55} & 0 \\ & & & & & b_{66} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Równania fizyczne, odpowiadające macierzy (5.12), przyjmują postać uogólnionych praw Hooke'a:

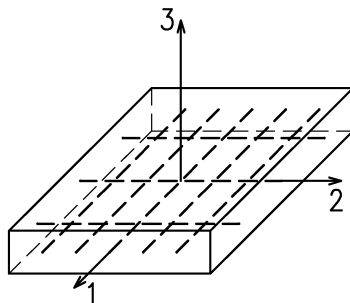
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= b_{11} \sigma_x + b_{12} \sigma_y + b_{13} \sigma_z = \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_y - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_z, \\ \varepsilon_y &= b_{21} \sigma_x + b_{22} \sigma_y + b_{23} \sigma_z = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_x + \frac{1}{E_2} \sigma_y - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_z, \\ \varepsilon_z &= b_{31} \sigma_x + b_{32} \sigma_y + b_{33} \sigma_z = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_y + \frac{1}{E_3} \sigma_z, \\ \gamma_{yz} &= b_{44} \tau_{yz} = \frac{1}{G_{23}} \tau_{yz}, \quad \gamma_{xz} = b_{55} \tau_{xz} = \frac{1}{G_{13}} \tau_{xz}, \quad \gamma_{xy} = b_{66} \tau_{xy} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

We wzorach (5.13) 9 niezerowych parametrów b_{ij} wyrażono przez 12 stałych sprężystości, tj. moduły Younga i Kirchhoffa E_i , G_{ij} oraz współczynniki Poissona ν_{ij} . Z warunków symetrii macierzy podatności \mathbf{B} wynikają następujące trzy związki:

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}, \quad E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23}, \quad E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31}. \quad (5.14)$$

Tak więc w przypadku materiału ortotropowego mamy 9 niezależnych parametrów.

Przykładem materiału ortotropowego mogą być kompozyty epoksydowe, zbrojone włóknami szklanymi. Jeśli włókna są ułożone w warstwach wzajemnie prostopadłych to kierunki ortotropii można przedstawić na Rys. 5.2. W Tablicy 1, wziętej z [9], zestawiono przykładowo dane dla kompozytów jednokierunkowo zbrojonych (1:0) oraz dwukierunkowo zbrojonych o stosunku gęstości włókien 2:1.



Rys. 5.2. Kierunki ortotropii kompozytu zbrojonego

Stałe sprężystości	Zbrojenie	
	1:0	2:1
E_1 [GPa]	57	36.8
E_2 [GPa]	14	26.8
E_3 [GPa]	14	11.0
G_{12} [GPa]	5.7	5.0
G_{23} [GPa]	5.0	4.1
G_{13} [GPa]	5.7	4.5
ν_{12}	0.277	0.105
ν_{23}	0.400	0.431
ν_{31}	0.068	0.405

Tablica 5.1. Stałe sprężystości dla kompozytów jedno- i dwukierunkowo zbrojonych

3. Materiał poprzecznie izotropowy. Ten przypadek występowania płaszczyzny symetrii, na której nie ma wyróżnionych kierunków anizotropii, tzn. *każdy kierunek 1, 2 jest kierunkiem izotropii materiału*, Rys. 5.1c. W takim przypadku mamy 5 niezależnych parametrów: b_{11} , b_{12} , b_{13} , b_{33} i b_{44} a równania uogólnionego równania Hooke'a przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= b_{11} \sigma_x + b_{12} \sigma_y + b_{13} \sigma_z = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) - \frac{\nu'}{E'} \sigma_z, \\
 \varepsilon_y &= b_{12} \sigma_x + b_{11} \sigma_y + b_{13} \sigma_z = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x + \sigma_y) - \frac{\nu'}{E'} \sigma_z, \\
 \varepsilon_z &= b_{13} (\sigma_x + \sigma_y) + b_{33} \sigma_z = -\frac{\nu'}{E'} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E'} \sigma_z, \\
 \gamma_{yz} &= b_{44} \tau_{yz} = \frac{1}{G'} \tau_{yz}, \\
 \gamma_{xz} &= b_{44} \tau_{xz} = \frac{1}{G'} \tau_{xz}, \\
 \gamma_{xy} &= 2(b_{11} - b_{12}) \tau_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Podobnie jak w przypadku materiału ortotropowego, możemy posługiwać się pięcioma niezależnymi stałymi sprężystości: E , E' , G' , ν , ν' , gdyż $G = E/(2(1+\nu))$.

4. Materiał izotropowy. Jeśli wszystkie kierunki materiału są sprężyste równoważne, to w (5.15) przyjmujemy:

$$E = E', \quad \nu = \nu', \quad G = G' = E/(2(1+\nu')) \tag{5.16}$$

i równania uogólnionego prawa Hooke'a przyjmują postać:

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)],
 \end{aligned}
 } \tag{5.17}$$

Wzory (5.17) zależą od 2 stałych sprężystości – najczęściej stosuje się stałe E i ν . Równania te można odwrócić do postaci $\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl})$ i napisać w zwartej postaci:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= 2\mu \varepsilon_x + \lambda \vartheta, \\
 \sigma_y &= 2\mu \varepsilon_y + \lambda \vartheta, \\
 \sigma_z &= 2\mu \varepsilon_z + \lambda \vartheta, \\
 \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy}, \\
 \tau_{yz} &= \mu \gamma_{yz}, \\
 \gamma_{zx} &= \mu \gamma_{zx},
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

gdzie występują stałe Lamégo λ i μ oraz dylatacja $\vartheta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \equiv \frac{2\nu G}{1 - 2\nu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \equiv G. \quad (5.19)$$

Tak samo jak dla odkształceń możemy posługiwać się *aksjatorem i dewiatorem naprężeń*:

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{\text{sr}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\text{sr}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\text{sr}} \end{pmatrix}, \quad D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{\text{sr}} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{\text{sr}} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_x - \sigma_{\text{sr}} \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Tensory (5.20) są połączone z tensorami odkształceń A_ε i D_ε związkami liniowymi

$$A_\sigma = K A_\varepsilon, \quad D_\sigma = 2G T_\varepsilon, \quad (5.21)$$

gdzie K jest *objętościowym modułem sprężystości*:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \equiv \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (5.22)$$

Ze wzoru (5.21)₁ wynika, że dla $\nu = 1/2$ mamy *materiał nieściśliwy*, gdyż dla moduł objętościowy $K(\nu \rightarrow 0.5) \rightarrow \infty$ i *nie występuje odkształcenie objętościowe*, tzn.

$$\vartheta = 3\varepsilon_{\text{sr}} \equiv \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0. \quad (5.23)$$