Płaski stan naprężeń
Wyznaczanie charakterystycznych naprężeń

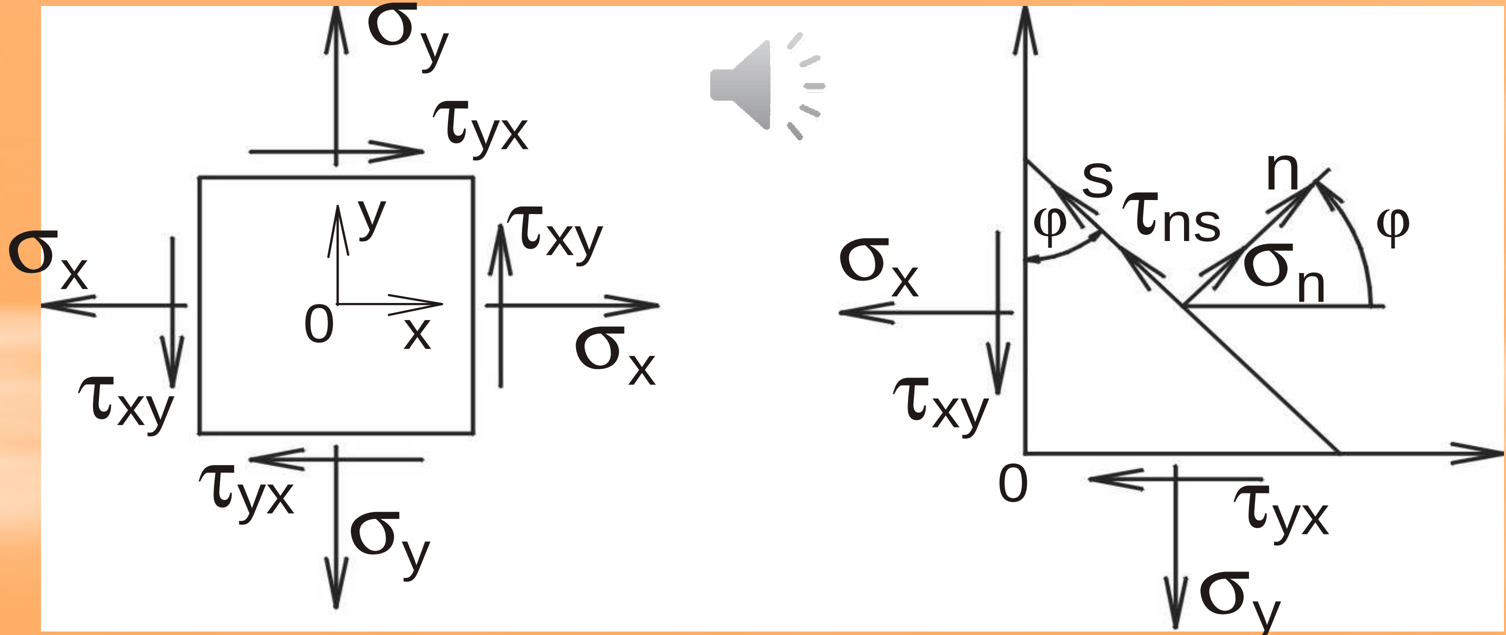
Tensor naprężeń dla płaskiego stanu naprężenia

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x y

Dodatnie naprężenie na brzegach elementarnego kwadratu i trójkąta

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

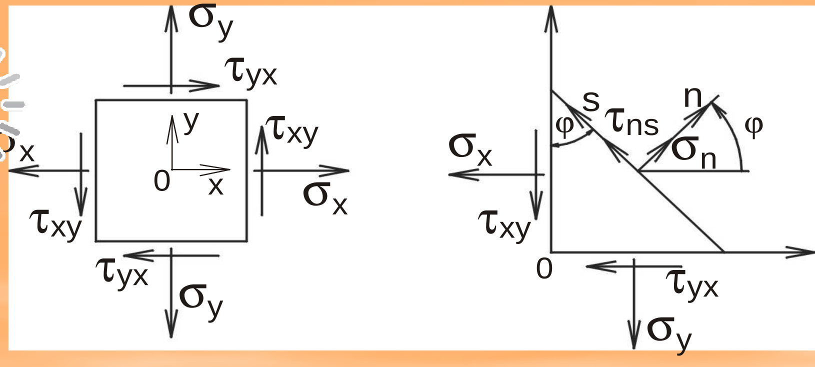


$$\sum x = 0\,,\quad \sum y = 0,\;\; M = 0\,.$$

$$\sum MA = 0 : \qquad \tau xy = \tau yx$$

Równania równowagi trójkąta:

$$\sum x = 0\,,\quad \sum y = 0 :$$



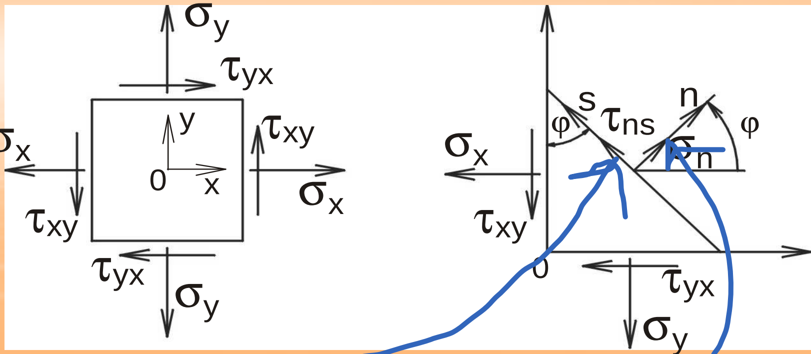
$$(\sigma_n ds)\cos\varphi - (\tau_{ns} ds)\sin\varphi = \sigma_x dy + \tau_{xy} dx \qquad |\cos\varphi \;|-\sin\varphi$$

$$(\sigma_n ds)\sin\varphi + (\tau_{ns} ds)\cos\varphi = \sigma_y dx + \tau_{xy} dy \qquad |\sin\varphi \;|\cos\varphi$$

$$\frac{dx}{ds} = \sin\varphi \ , \quad \frac{dy}{ds} = \cos\varphi$$

$$\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi \ ,$$

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$$



$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_{ns} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{cases}$$

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NAPRĘŻENIA GŁÓWNE

Kierunek główny:

$$\mathrm{tg}\,2\varphi_{gł} = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

+

Naprężenie główne:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^{\ 2}}$$

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Maksymalne naprężenia styczne

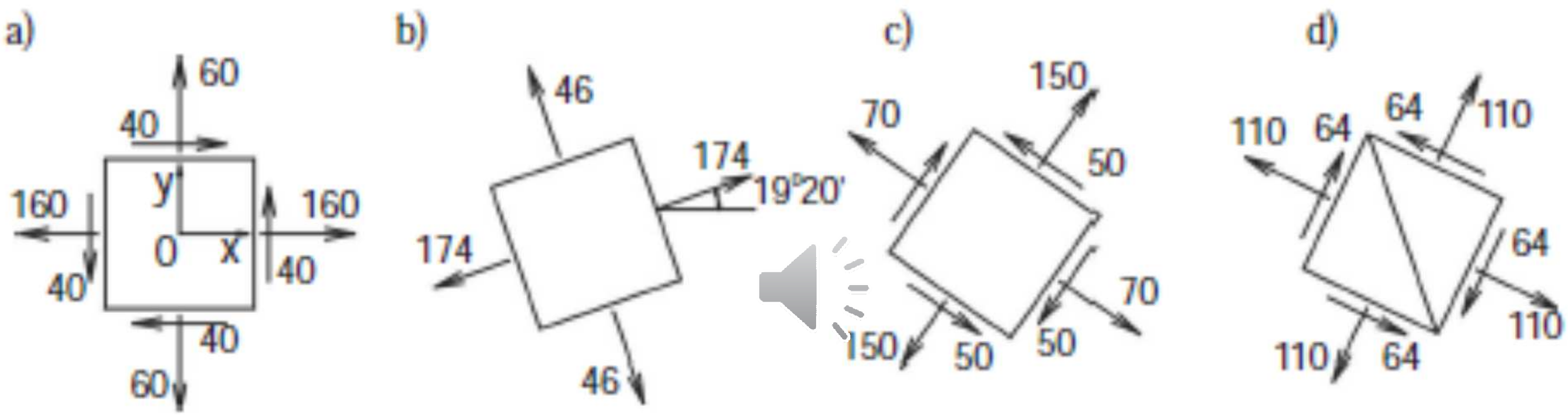
$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{aligned} \tau_{max} &= \left| -\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}{}^2} \right| = \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \right|, \\ \sigma_{n,\,max} &= \sigma_{n1} = \sigma_{n2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\ . \end{aligned}\right.$$

$$\varphi_{ST} = \varphi_{gł} + 45^0$$

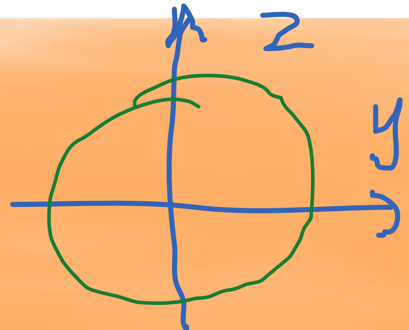
Przykład: Znane są naprężenia w punkcie 0: $\sigma_x = 160\text{MPa}$, $\sigma_y = 60\text{MPa}$, $\tau_{xy} = 40\text{MPa}$ (Rys.a). Obliczyć:

1) wartości i kierunki główne naprężeń (Rys. b),
2) wartości naprężeń przy obrocie układu współrzędnych *x*, *y* o kat $\varphi_\alpha = 45^0$. (Rys.c),
3) kierunek i wartość maks. naprężeń stycznych



Rys. : a) Dane naprężenia, b) kierunek i naprężenia główne, c) naprężenia dla obrotu elementarnego kwadratu o $\varphi_\alpha = 45^0$. d) kierunek maksymalnego naprężenia głównego i odpowiednie naprężenia główne

x, z



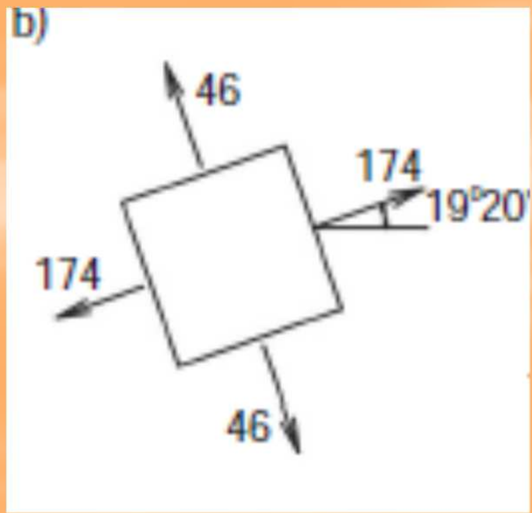
x – x
y – z

1). Obliczenia naprężeń głównych

$$tg2\varphi_{gł} = \frac{2 \cdot 40}{160 - 60} = 0.8 \rightarrow 2\varphi_{gl} = 38^{o}40'$$

$$\text{tg } 2\varphi \text{ gł} = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

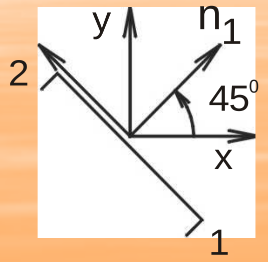
$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^{\;2}}$$



+

2). Obrót osi (*x, y*) o kąt $\varphi_n = 45^0$

Na boku 1-2



$\varphi_n = 45^0$ $\quad \sin\varphi_n = \cos\varphi_n = 0.7077$

$\sin^2\varphi_n = \cos^2\varphi_n = 0.5$

$\sin 2\varphi_n = 1.0$, $\cos 2\varphi_n = 0.0$

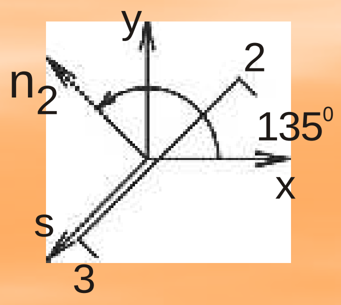
$\sigma_n =$ 160 $*$ 0.5 + 60 $*$ 0.5 + 40 $*$ 1.0 = 150 MPa ,

$\tau_{ns} = \frac{1}{2}$ (60-160) = 50 MPa

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_n = \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_{ns} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi \end{array}\right.$$

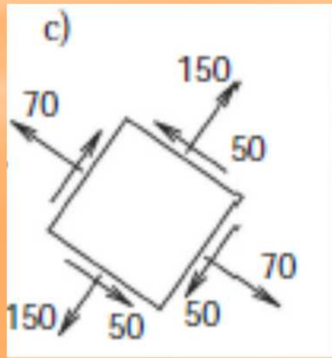
Na boku 2-3

$\varphi_n = 135^0$



$\sigma_n =$ 70 MPa

τ_{ns} = -50 MPa

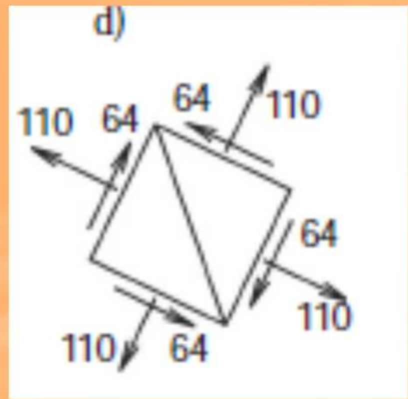


3) Maks. naprężenia styczne

$$\varphi_{st} = 64^o 20'$$

$$\varphi_{ST} = \varphi_{gł} + 45^0$$

$$\tau_{max} = \frac{46 - 174}{2} = -64 MPa$$



$$\sigma_{1/2} = \frac{174 + 46}{2} = 110 \mathrm{MPa}$$

$$\left[\begin{aligned} \tau_{max} &= \left| -\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^{\ 2}} \right| = \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \right|, \\ \sigma_{n,\, max} &= \sigma_{n1} = \sigma_{n2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \;. \end{aligned}\right.$$