

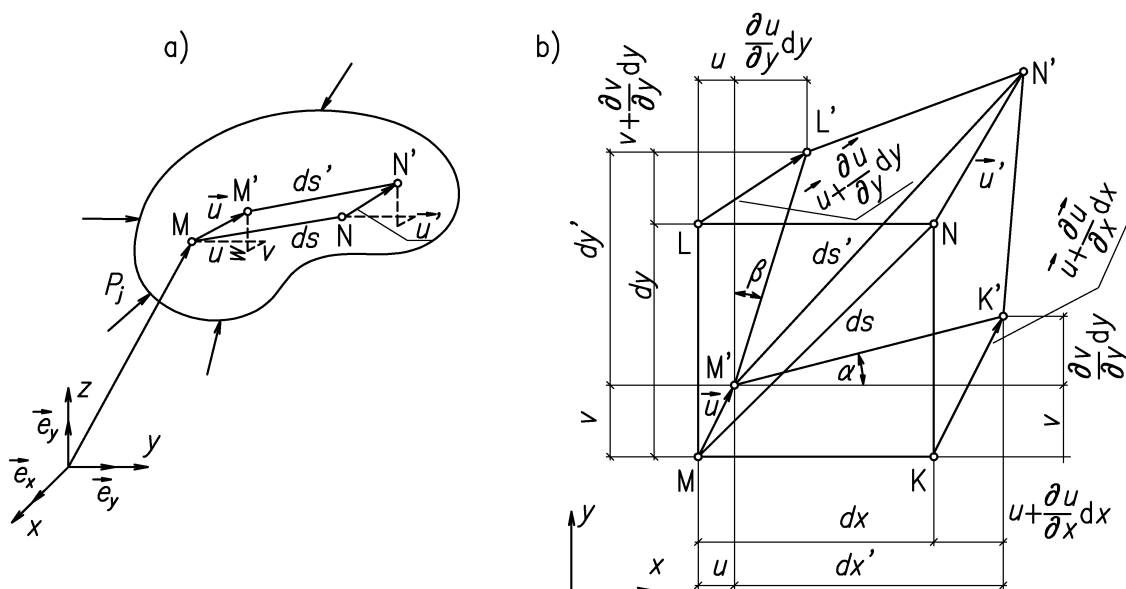
Wykład TSIP Rozdz 4

4. Stan odkształcenia (równania geometryczne)

4.1. Odkształcenia

Pod wpływem działania sił masowych i powierzchniowych punkty ciała C ulegają przemieszczeniom. Na Rys. 4.1 pokazano przemieszczenie punktu M do M' określone wektorem przemieszczenia \vec{u} , Rys. 4.1:

$$\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z \equiv u_i\vec{e}_i. \quad (4.1)$$



Rys. 4.1: a) Przemieszczenia punktów M i N ;
b) Przemieszczenia punktów M, K, L leżących na liniach równoległych do osi x i y

Teraz dokładniej rozpatrzmy przemieszczenia punktu M . Dla ułatwienia dalszego opisu zajmiemy się przemieszczeniami punktów leżących na liniach równoległych do osi układu x, y, z , odległych o dx, dy, dz od punktu M .

Na Rys. 4.1b pokazano przemieszczenia punktów M, K, L na płaszczyźnie (x, y) . Podczas przemieszczenia odcinek \overline{MK} przejdzie w położenie $\overline{M'K'}$ i rzut jego długości wynosi:

$$dx' = dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Stąd wynika względny przyrost długości dx

$$\varepsilon_x \equiv \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4.2)$$

Tak samo określamy względne wydłużenie odcinków dy i dz :

$$\varepsilon_y \equiv \frac{dy' - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z \equiv \frac{dz' - dz}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (4.3)$$

Względne wydłużenia, określane gradientami wektora przemieszczenia \vec{u} nazywamy *odkształceniami liniowymi* $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$. Oprócz względnych wydłużeń odcinek \overline{MN} będzie również podlegał obrotom. Na Rys.4.1b pokazano kąty obrotów α, β . Zajmiemy się określeniami zależności tych kątów od gradientów przemieszczeń.

Dla kąta α piszemy zależności wynikające z Rys.4.1b:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x},$$

a dla małego kąta będzie $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ oraz dla $\varepsilon_x \ll 1$ i stąd otrzymujemy:

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} \equiv \varepsilon_{xy}. \quad (4.4)$$

Tak samo dla kąta β otrzymujemy zależność

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv \varepsilon_{yx} \quad (4.5)$$

i łącznie

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \equiv \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.6)$$

W dalszym ciągu γ_{xy} będziemy nazywali *odkształceniem postaciowym*, które jest różnicą między kątem prostym i kątem ω jaki będzie między odcinkami \overline{MK} i \overline{ML} , równoległymi do osi x i y , po przemieszczeniu do położen $\overline{M'K'}$ i $\overline{M'L'}$, Rys. 4.1b. Tak samo definiujemy odkształcenia postaciowe γ_{yz} i γ_{zx} :

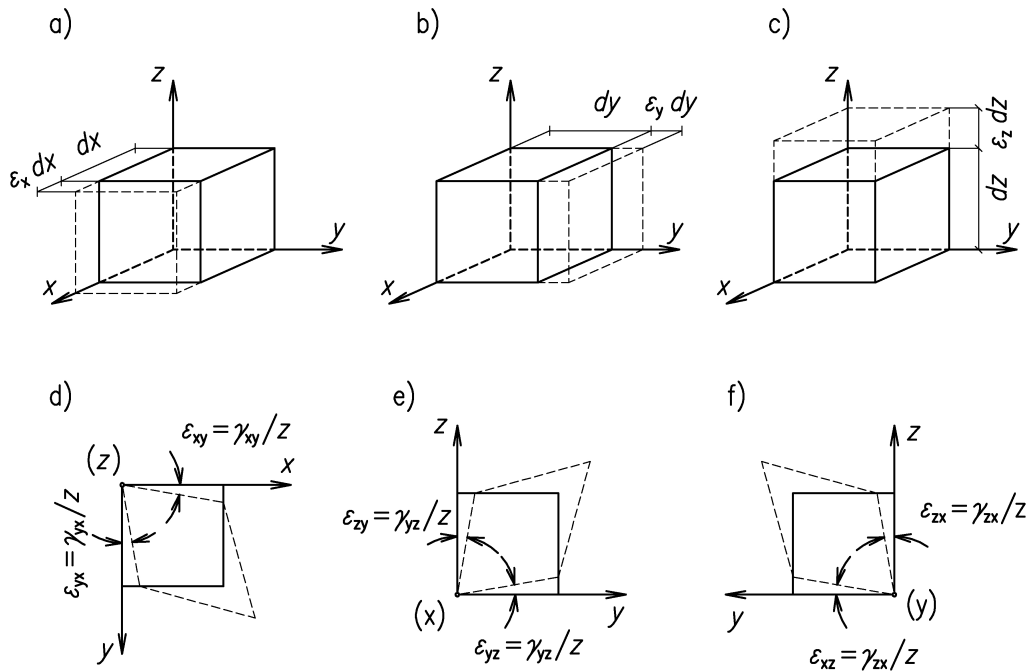
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (4.7)$$

Łącznie stan odkształcenia opisuje 6 składowych związanych ze składowymi wektora przemieszczeń przez tzw. *równania geometryczne* (równania Cauchy'ego):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (4.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Trzy pierwsze odkształcenia to względne wydłużenie, a trzy odkształcenia postaciowe odpowiadają zmianom kątów nachylenia boków elementarnego sześcianu do osi układu kartezjańskiego, Rys.4.2.



Rys. 4.2 : Dodatnie odkształcenia dla boków elementarnego sześcianu

4.2. Odkształcenia odcinka i odkształcenia objętościowe

Znając odkształcenie ε_{ij} możemy obliczyć *odkształcenie odcinka* ds (Rys.4.1b) w przypadku przestrzennego stanu naprężenia. W tym celu korzystamy z zależności

$$ds'^2 - ds^2 = (ds_x'^2 + ds_y'^2 + ds_z'^2) - (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (4.9)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} ds_x' &= dx + u' - u = dx + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx = (1 + \varepsilon_x) dx, \\ ds_y' &= dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy = (1 + \varepsilon_y) dy, \\ ds_z' &= dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz = (1 + \varepsilon_z) dz. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Po podstawieniu (4.10) do (4.9) i zachowaniu członów liniowych gradientów $\partial u_j / \partial x_j$ otrzymujemy:

$$ds'^2 - ds^2 \approx 2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial v}{\partial y} dy^2 + \frac{\partial w}{\partial z} dz^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx dy + \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy dz + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) dz dx \right]$$

dochodzimy do następującego wzoru:

$$ds'^2 - ds^2 = 2(\varepsilon_x dx^2 + \varepsilon_y dy^2 + \varepsilon_z dz^2 + \gamma_{xy} dx dy + \gamma_{yz} dy dz + \gamma_{zx} dz dx). \quad (4.11)$$

Z definicji odkształcenia jako wydłużenia względnego

$$\varepsilon_s = \frac{ds' - ds}{ds} \rightarrow ds' = (1 + \varepsilon_s) ds \rightarrow \frac{ds'}{ds} = 1 + \varepsilon_s \quad (4.12)$$

i podzieleniu (4.11) przez $2ds^2$ wyprowadzamy wzór na odkształcenie ε_s :

$$\begin{aligned} \frac{ds'^2 - ds^2}{2ds^2} &= \frac{ds' - ds}{ds} \frac{1}{2} \frac{ds' + ds}{ds} = \varepsilon_s \frac{1}{2} \left(1 + \frac{ds'}{ds}\right) = \varepsilon_s \frac{1}{2} \left(1 + \frac{ds'}{ds}\right) = \varepsilon_s \frac{1}{2} (1 + 1 + \varepsilon_s) = \varepsilon_s + \frac{\varepsilon_s^2}{2} \approx \\ \varepsilon_s &= \varepsilon_x l_x^2 + \varepsilon_y l_y^2 + \varepsilon_z l_z^2 + \gamma_{xy} l_x l_y + \gamma_{yz} l_y l_z + \gamma_{zx} l_z l_x \end{aligned} \quad (4.13)$$

gdzie:

$$l_x = \frac{dx}{ds}, \quad l_y = \frac{dy}{ds}, \quad l_z = \frac{dz}{ds}, \quad (4.14)$$

są dostawami kierunkowymi $l_j = \cos(s', x_j)$.

Na Rys. 4.2 widać, że względne wydłużenia boków prowadzą do zmiany objętości elementarnego sześcianu. Jeśli równocześnie długości wszystkich boków ulegną zmianie to elementarna objętość $dV = dx dy dz$ będzie zmieniała się według następującego wzoru:

$$dV' = ds'_x ds'_y ds'_z = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) dx dy dz \quad (4.15)$$

i odkształcenie objętościowe wynosi:

$$\vartheta \equiv \frac{dV' - dV}{dV} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (4.16)$$

4.3. Tensor odkształceń

Ze składowych (4.8) budujemy *tensor odkształceń*:

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Jest to tensor symetryczny, co pokazujemy na przykładzie jednego odkształcenia:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (4.18)$$

Składowe tensora T_ε podlegają prawu transformacji współrzędnych

$$\varepsilon_{i'i'} = a_{i'k} a_{j'l} \varepsilon_{kl}. \quad (4.19)$$

Skorzystajmy ze wzoru (4.13) celem obliczenia odkształcenia odcinka ds przy przejściu do odcinaka ds'

$$\varepsilon_{s's'} = a_{s'x}^2 \varepsilon_x + a_{s'y}^2 \varepsilon_y + a_{s'z}^2 \varepsilon_z + \underbrace{(a_{s'x} a_{s'y} \varepsilon_{xy} + a_{s'y} a_{s'x} \varepsilon_{yx})}_{a_{s'x} a_{s'y} \gamma_{xy}} + a_{s'y} a_{s'z} \gamma_{yz} + a_{s'z} a_{s'x} \gamma_{zx}. \quad (4.20)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wzór (4.20) po uwzględnieniu, że $a_{s'i} = l_i$ dla $i = x, y, z$.

Tak samo jak dla tensora naprężenia T_σ możemy obliczyć główne odkształcenia tensora odkształceń T_ε korzystając z równania wiekowego:

$$\varepsilon^3 - J_1^\varepsilon \varepsilon^2 + J_2^\varepsilon \varepsilon - J_3 = 0. \quad (4.21)$$

Niezmienniki tensora odkształceń określamy tak samo jak niezmienniki tensora naprężeń

$$J_1^\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \vartheta, \quad ,$$

$$J_2^\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \gamma_{zx}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \varepsilon_x \end{vmatrix} = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2), \quad (4.22)$$

$$J_3^\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

Uwagi: Tensor T_ε ma takie same właściwości jak tensor T_σ . W szczególności tensor odkształcenia T_ε ma:

- 1⁰ trzy rzeczywiste wartości główne $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$,
- 2⁰ kierunki odkształceń głównych są wzajemnie prostopadłe,
- 3⁰ koła Mohra można konstruować również dla analizy stanu odkształcenia.

4.3. Tensor kulisty i dewiator odkształceń

Tensor odkształceń możemy rozłożyć na dwa tensory:

$$T_{\varepsilon} = A_{\varepsilon} + D_{\varepsilon}, \quad (4.23)$$

gdzie:

a) tensor kulisty, nazywany *aksjatorem odkształceń*

$$A_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{sr} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vartheta/3 & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta/3 & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta/3 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

gdzie, zgodnie z (4.16), napężenie średnie jest równe odkształceniu objętościowemu $\varepsilon_{sr} = \vartheta/3$, stąd:

b) *dewiator odkształcenia*

$$D_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \frac{\vartheta}{3} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \frac{\vartheta}{3} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \frac{\vartheta}{3} \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Tensory T_{obj} i T_{dev} są stosowane w analizie wyężenia materiału i w teorii plastyczności. Tutaj tylko wymieniamy niektóre właściwości niezmienników tych tensorów:

$$J_1^{A\varepsilon} = \vartheta, \quad J_2^{D\varepsilon} = 0, \quad J_3^{D\varepsilon} = -\frac{1}{6}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2). \quad (4.26)$$

4.4. Równania nierozdzielności odkształceń

Sześć składowych tensora odkształceń jest związanych sześcioma równaniami (4.8) z trzema składowymi wektora przemieszczeń. Oznacza to, że składowe tensora T_{ε} nie mogą być przyjmowane dowolne (nie są od siebie niezależne). Pokażemy to na składowych o indeksach x , y i przemieszczeniach u , v .

Różniczkujemy odkształcenia ε_x i ε_y a następnie je dodajemy:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \equiv \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Postępując tak samo z odkształceniami ε_y i ε_z oraz z ε_z i ε_x dochodzimy do trzech pierwszych *równań nierozdzielności*:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \quad (4.27.1)$$

W podobny sposób, tj. przez różniczkowanie, dodawanie i odejmowanie pochodnych odkształceń dochodzimy do *trzech następujących równań nierozdzielności*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (4.27.2)$$

Znaczenie fizyczne równań nierozdzielności (4.27) polega na tym, że ich spełnienie zapewnia spójność i ciągłość ciała C podczas jego odkształcania się. Inną ważną właściwością jest możliwość wykorzystania równań (4.8) do obliczania pól przemieszczeń znając ich cząstkowe pochodne $\partial u_i / \partial x_j$.

4.5. Płaski stan odkształcenia

Jest to stan odkształcenia, w którym występują odkształcenia tylko w jednej płaszczyźnie, np. płaszczyźnie (x, y) . W takim stanie wszystkie składowe tensora naprężeń z indeksami z zerują się:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad (4.28)$$

W płaskim stanie odkształcenia równania geometryczne (4.8) redukują się do trzech równań

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4.29)$$

a równania nierozdzielności redukują się do jednego równania:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (4.30)$$