6. Zestawienie równań teorii sprężystości

6.1. Podstawowe grupy równań TS

W poprzednich rozdziałach zostały wyprowadzone *podstawowe równania teorii sprężystości*. Zestawiamy je w trzech głównych grupach równań TS.

I. Równania statyki (dynamiki)

1. *Równania równowagi wewnętrznej* (nazywane też równaniami Naviera):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial_z} + X = 0 \qquad \left(= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right), \\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial_z} + Y = 0 \qquad \left(= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right), \\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial_z} + Z = 0 \qquad \left(= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right),
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

gdzie w nawiasach podano wielkości odpowiadające siłom bezwładności, które występują w równaniach dynamiki (równania statyki stają się równaniami ruchu).

2. **Równania równowagi na powierzchni ograniczającej ciało odkształcalne**:

$$
\begin{aligned}
p_{nx} &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z , \\
p_{ny} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z , \\
p_{nz} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z .
\end{aligned} \tag{6.2}
$$

II. Równania geometryczne

1. Te *równania odpowiadają związkom między odkształceniami i przemieszczeniami* (równania nazywane też równaniami Cauchy'ego):

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} , \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} , \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} , \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} , \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} , \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} .
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

2. *Równania nierozdzielności* (ciągłości) *odkształceń* (nazywane równaniami de Saint-Venanta):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \;,$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \;,$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \;,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x}\right) = 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \;, \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \;,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \;.$$

III. **Równania fizyczne** odpowiadające algebraicznym związkom *między odkształceniami i naprężeniami* (nazywane też uogólnionymi równaniami Hooke'a):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \;,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right] \;,$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \;, \tag{6.5}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \;,$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \;,$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \;,$$

gdzie występują moduły sztywności Younga E lub też Kirchhoffa:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \;, \tag{6.6}$$

Równania (6.5) można napisać w postaci odwróconej (*zależność naprężeń od odkształceń*):

$$\begin{aligned} &\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\vartheta \;, \quad \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\vartheta \;, \quad \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\vartheta \\ &\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \;, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \;, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \;. \end{aligned} \tag{6.7}$$

gdzie posługujemy się *modułem Lamégo* λ, zależnego od modułów sztywności E lub G oraz *współczynnikiem Poissona* v i *dylatacją* ϑ:

$$\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \ , \quad \vartheta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \ . \tag{6.8}$$

Z równań (6.7) wynika związek dla pierwszych niezmienników tensorów naprężeń i odkształceń. Przez dodanie $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ otrzymujemy:

$$\theta = \frac{E}{1-2\nu} \vartheta \ , \tag{6.9}$$

gdzie:

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \equiv J_1^{\sigma} \ , \quad \vartheta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \equiv J_1^{\varepsilon} \ . \tag{6.10}$$

Podstawowy układ równań TS tworzą:

Nazwa równań:	*liczba równań*
I. Równania równowagi (6.1)	3
II. Równania geometryczne (6.3)	6
III. Równania fizyczne (6.5) lub (6.7)	6
Razem równań:	**15**

Podstawowe grupy niewiadomych:

Nazwa niewiadomych		*liczba niewiadomych*
1) Naprężenia	σ_x , σ_y, σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx}	6
2) Odkształcenia	ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx}	6
3) Przemieszczenia	u, v, w	3
Razem niewiadomych		**15**

Jeśli korzystamy z trzech grup równań to równania równowagi na brzegu ciała (6.2) służą sformułowaniu warunków brzegowych, a równania nierozdzielności odkształceń (6.4) pełnią rolę sprawdzianu poprawności otrzymywanych rozwiązań. Jeśli nie obliczamy przemieszczeń (mamy 12 niewiadomych σ_{ij} oraz ε_{ij}) korzystamy z 3 równań równowagi (6.1), 6 równań fizycznych (6.5) lub (6.7) oraz 3 równań nierozdzielności (6.4). Najprościej jest wybrać 3 pierwsze równania nierozdzielności, a 3 pozostałe użyć do sprawdzenia otrzymywanych rozwiązań.

6.2. Inne układy równań TS

W zależności od wyboru podstawowych niewiadomych otrzymujemy odpowiednio przekształcone grupy równań TS.

6.2.1. Równania TS w przemieszczeniach

Jako podstawowe niewiadome przyjmujemy przemieszczenia (dokładniej funkcje wektorowego pola przemieszczeń):

$$u = f_1(x, y, z)\ , \quad v = f_2(x, y, z)\ , \quad w = f_3(x, y, z)\ . \tag{6.11}$$

Aby otrzymać odpowiednie 3 równania podstawiamy prawe strony równań geometrycznych (6.3) a następnie do równań fizycznych (6.7) i do równań równowagi (6.1). Przekształcenia są pokazane tylko w odniesieniu do 1 równania równowagi:

$$\sigma_x = 2G\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\vartheta\ , \quad \tau_{yx} = G\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \tau_{zx} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

stąd po zróżniczkowaniu:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = 2G\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\ , \quad \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} = G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial yz}\right), \quad \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

po dodaniu i po podstawieniu do równania równowagi $(6.1)_1$ otrzymujemy:

$$\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + X =$$

$$\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + G\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right) + u + X =$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + G\ \nabla^2 u + X\ ,$$

gdzie ∇^2 jest *operatorem harmonicznym*:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\ . \tag{6.12}$$

Dochodzimy w ten sposób do *równań równowagi wyrażonych przez przemieszczenia*, (te równania nazywa się *równaniami Lamégo*):

$$\begin{aligned}
&(\lambda + G)\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + G\nabla^2 u + X = 0\ ,\\
&(\lambda + G)\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y = 0\ ,\\
&(\lambda + G)\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z = 0\ .
\end{aligned} \tag{6.13}$$

gdzie dla skrócenia zapisu pozostawiono:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial j} = \frac{\partial}{\partial j}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad \text{dla } j = x, y, z\,. \tag{6.14}$$

Ponieważ zostały wyeliminowane naprężenia dlatego również warunki brzegowe (6.2) wyrażamy przez przemieszczenia (dokładniej przez gradienty, tj. pochodne cząstkowe przemieszczeń):

$$\begin{aligned}
p_{nx} &= \left(\lambda\vartheta + 2G\frac{\partial u}{\partial x}\right)n_x + G\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)n_y + G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)n_z = \\
&= \lambda\vartheta n_x + G\left(\frac{\partial u}{\partial x}n_x + \frac{\partial u}{\partial y}n_y + \frac{\partial u}{\partial z}n_z\right) + G\left(\frac{\partial u}{\partial x}n_x + \frac{\partial v}{\partial x}n_y + \frac{\partial w}{\partial x}n_z\right), \\
p_{ny} &= \lambda\vartheta n_y + G\left(\frac{\partial v}{\partial x}n_x + \frac{\partial v}{\partial y}n_y + \frac{\partial v}{\partial z}n_z\right) + G\left(\frac{\partial u}{\partial y}n_x + \frac{\partial v}{\partial y}n_y + \frac{\partial w}{\partial z}n_z\right), \qquad (6.15) \\
p_{nz} &= \lambda\vartheta n_z + G\left(\frac{\partial w}{\partial x}n_x + \frac{\partial w}{\partial y}n_y + \frac{\partial w}{\partial z}n_z\right) + G\left(\frac{\partial u}{\partial z}n_x + \frac{\partial v}{\partial z}n_y + \frac{\partial w}{\partial z}n_z\right).
\end{aligned}$$

6.2. Równania TS w naprężeniach

Po przekształceniach podobnych do wyżej pokazanych, por. [4], ss. 90-91, dochodzimy do 6 *równań nierozdzielności wyrażonych przez naprężenia* (równania Baltramiego-Michella):

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = -2\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right), \\
&\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = -2\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right), \\
&\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = -2\frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right), \qquad (6.16) \\
&\nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right), \\
&\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\right), \\
&\nabla^2\tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial x} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

Uwagi:

1. Oczywiście, równania (6.16) uzupełniamy równaniami (6.2), odpowiadającymi naprężeniowym warunkom brzegowym;

2. Na koniec tego punktu należy dodać, że zarówno równania w przemieszczeniach (6.13) jak też w naprężeniach (6.16) spełniają warunki jednoznaczności rozwiązań;

3. Należy podkreślić, ze przytoczone dwa układy równań odpowiadają dwom podstawowym metodom sformułowanym w mechanice konstrukcji, a więc *metodzie przemieszczeń* i *metodzie sił* (dokładniej uogólnionych naprężeń).

4. Wyprowadzone układy równań mogą być modyfikowane w różny sposób w ramach różnorodnych równań *metody mieszanej*.

6.3. Podstawowe metody rozwiązywania równań TS.

W ogólności istnieją trzy podstawowe metody rozwiązywania równań TS:

1. *Sposób bezpośredni* (prosty) całkowania równań TS;

2. *Sposób odwrotny,* gdy z góry przyjmujemy postać funkcji dla określonych grup wielkości a następnie obliczamy bądź parametry bądź też postać rozwiązań dla pozostałych wielkości.

3. *Sposób częściowo odwrotny*, gdy w ramach grupy wielkości (np. warunki brzegowe) część składowych z góry zakładamy, a pozostałe obliczamy z równań TS.

4. *Metody przybliżone* opierają się na sformułowaniach słabych, tzn. na funkcjonałach odnoszących się do całych ciał odkształcalnych lub ich częściach i/lub na *metodach numerycznych.*

5. Spośród metod przybliżonych należy wymienić *metodę Ritza*, oparta na twierdzeniu o minimum energii potencjalnej oraz metodę *ortogonalizacji Galerkina*, wykorzystującą zasadę prac wirtualnych do *obliczania sił residualnych*. Obydwie metody należą do tzw. *sformułowań słabych*, gdyż obliczają funkcjonały odnoszące się do całego układu mechanicznego (całej konstrukcji) lub jego części (np. równania pięter konstrukcji lub równania części nieprzesuwnych układu mechanicznego).

6. Obydwie wyżej wymienione metody przybliżone są formułowane w postaci analitycznej i ze względu na ich właściwości są włączane do *metod komputerowych*, które opierają się na wykorzystaniu i przetwarzaniu *danych w postaci liczbowej*. Te metody mogą mieć swoje wersje komputerowe np. w odniesieniu do podstawowych metod mechaniki budowli. Spośród metod komputerowych zawrotną karierę zrobiła *Metoda Elementów Skończonych* (MES), por. Punkt 1.5. W MES posługujemy się metodami Ritza o Galerkina oraz sformułowaniami słabymi celem obliczania sztywności elementów skończonych.

7. W naszym wykładzie TSP eksponujemy metody analityczne. Różne *metody przybliżone i komputerowe* są rozwijane w odniesieniu do zagadnień związanych z wykładami przedmiotów zawodowych, np. konstrukcje metalowe, konstrukcje betonowe i żelbetonowe, mechanika gruntów i fundamentowanie. Tym nie mniej zrozumienie metod analitycznych dyskutowanych w TSP jest wartościowym kluczem do rozumienia formułowania różnych metod przybliżonych i ich związków ze zjawiskami fizycznymi.