

5.4. Hipotezy wyężenia materiału

Hipotezy wyężenia określają *stan fizyczny* (stan napężenia lub odkształcenia), *odpowiadający osiągnięciu* w danym punkcie ciała *granicy niebezpiecznej* [1, 5]. Najczęściej granicę niebezpieczną k określa się jako granicę sprężystości, granicę plastyczności i wytrzymałość doraźną w odniesieniu do naprężeń, graniczne odkształcenie przy zarysowaniu betonu lub odkształcenie plastyczne dla stali. Granicę niebezpieczną określa się na ogół za pomocą badań laboratoryjnych, np. jednoosiowe rozciąganie próbki stalowej, jednoosiowe rozciąganie próbki stalowej, jednoosiowe ściskanie próbki betonowej, trójosiowe ściskanie próbki gruntu itp.

Powszechnie przyjmuje się, że podstawowym badaniem laboratoryjnym jest *próba jednoosiowego rozciągania*, odnoszona do napężenia $\sigma_0 = \sigma_x \geq 0$. W przypadku złożonych stanów naprężeń, jakie mogą powstać w punkcie materialnym odkształcalnego ciała C, pojawia się problem wprowadzenia skalarnego *napężenia zastępczego*. Takie napężenie σ_{zast} , w ogólności zależne od sześciu składowych tensora naprężeń będzie używane jako miara *wyężenia materiału*.

Temu problemowi poświęcono wiele badań teoretycznych i doświadczalnych. Przyjęto w nich, że σ_{zast} określa się jako funkcję:

$$\sigma_{zast} \equiv \sigma_0 \text{ lub } F(\sigma_{ij}) \equiv F(\boldsymbol{\sigma}), \quad (5.43)$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}$ jest macierzą jednokolumnową pisaną we wierszu, podobnie jak notacja Voigta (5.2) (różnica polega na uporządkowaniu naprężeń stycznych):

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, 0, 0, 0\}. \quad (5.44)$$

W dalszym ciągu omawiania problemów wyężenia będziemy przyjmowali *algebraiczne uporządkowanie naprężeń głównych* według ich wartości:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (5.45)$$

Poszczególne hipotezy mają bądź interpretację fizykalną, bądź jedynie postać matematyczną. Hipotezy są odnoszone na ogół do niezmienników stanu napężenia lub odkształcenia.

Podstawowa *klasyfikacja hipotez* obejmuje trzy grupy, por. [5]:

- A. Hipotezy napężeniowe;
- B. Hipotezy odkształceniowe;
- C. Hipotezy energetyczne.

Dalej wymieniamy tylko wybrane hipotezy i uwagę skupimy na dwóch hipotezach najczęściej stosowanych.

A. Hipotezy naprężeniowe

A1. Hipoteza Galileusza maksymalnych naprężeń przyjmuje, że o osiągnięciu granicy niebezpiecznej decyduje *maksymalne naprężenie główne*:

$$\sigma_1 = k. \quad (5.46)$$

Naprężenie zredukowane jest określone wzorem:

$$\sigma_0 = \max(\sigma_1, \sigma, \sigma_3) \text{ dla } \sigma_1 > 0. \quad (5.47)$$

Najczęściej stan niebezpieczny odnosimy do jednoosiowego rozciągania, określając w ten sposób *naprężenie zastępcze*:

$$\sigma_{\text{zast}} \equiv \sigma_0 = k. \quad (5.48)$$

Dalej będziemy hipotezy ilustrowali na przykładzie *płaskiego stanu naprężeń* (PN). W tym stanie w płaszczyźnie (x, y) naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ mogą przyjmować różne wartości, natomiast naprężenia z indeksami z z założenia zerują się (obszerniej PSN jest dyskutowany w Rozdz. 7):

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0. \quad (5.49)$$

W płaszczyźnie (x, y) naprężenia główne, obliczane wzorami znanymi z WM obliczamy jako naprężenia dwuwymiarowe. Wobec konieczności rozpatrywania w hipotezach wyczerpania stanów trójwymiarowych będziemy naprężenia główne z WM pisali jako odnoszące naprężenia nieuporządkowane:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (5.50)$$

W odniesieniu do hipotezy Galileusza dla PN stosujemy wzór

$$\sigma_0 \equiv \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \text{ dla } \sigma_x + \sigma_y > 0. \quad (5.50 \text{ PSN})$$

Hipoteza Galileusza powstała w roku 1632 i ma znaczenie historyczne. Daje ona oceny stanu niebezpiecznego w wielu przypadkach znacznie odbiegające od doświadczeń laboratoryjnych nad wyczerpaniem materiałów. Istotną wadą tej hipotezy jest możliwość jej stosowania jedynie do dodatniej wartości maksymalnego naprężenia głównego.

A2. Hipoteza Clebscha-Rankina

W połowie XIX wieku pojawiły się propozycje Clebscha i Rankina jako uogólnienie hipotezy Galileusza na ujemne wartości naprężeń głównych. W hipotezie C-R przyjmuje się, że o osiągnięciu stanu niebezpiecznego decyduje bądź największe, bądź też algebraicznie najmniejsze naprężenie główne:

$$\sigma_1 = k_r, \quad \sigma_3 = -\kappa k_r, \quad \text{gdzie } \kappa = k_c / k_r. \text{ jest stałą materiałową.} \quad (5.51)$$

W odróżnieniu od hipotezy Galileusza hipoteza CR jest hipotezą dwuparametrową. Tak jak hipoteza G, również hipoteza CR nie została dostatecznie potwierdzona doświadczeniami na modelach materialnych.

A2. Hipoteza Tresci-Guesta największych naprężeń stycznych:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{\max} = k \quad , \quad (5.52)$$

a więc naprężenie zredukowane wynosi:

$$\sigma_o = \sigma_1 - \sigma_3 \quad . \quad (5.53)$$

O wyężeniu materiału ciała odkształcalnego decyduje *maksymalna, bezwzględna wartość podwojonych maksymalnych naprężeń stycznych*:

$$\sigma_o = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) \quad . \quad (5.54)$$

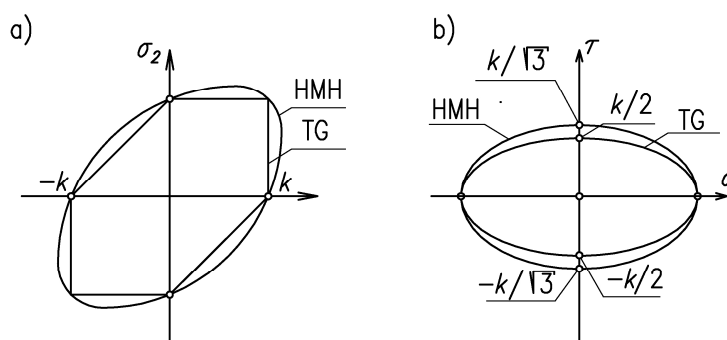
Warunki stanu niebezpiecznego można też napisać dla nieuporządkowanych naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ stanu bezpiecznego:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq k, \quad |\sigma_2 - \sigma_3| \leq k, \quad |\sigma_3 - \sigma_1| \leq k \quad . \quad (5.55)$$

W przypadku stanu PN naprężenia główne można przyjąć jako trójkę liczb nieuporządkowanych $\{\sigma_1, \sigma_2, 0\}$ skąd warunki stanu niebezpiecznego dla hipotezy Tresci-Guesta (TG) określają linie proste, por. Rys.5.4a:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = k, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = -k, \quad \sigma_1 = k, \quad \sigma_1 = -k, \quad \sigma_2 = k, \quad \sigma_2 = -k \quad . \quad (5.56P)$$

Na Rys. 5.4a pokazano krzywe graniczne na płaszczyźnie naprężeń głównych (σ_1, σ_2) . Określa ona obszar naprężeń bezpiecznych dla płaskiego stanu naprężenia.



Rys. 5.4: a) Krzywa graniczna dla płaskiego stanu naprężenia,
b) Krzywa graniczna dla belki, w odniesieniu do naprężenia normalnego σ i stycznego τ

W zastosowaniu do belek możemy przyjąć uproszczone oznaczenia $\sigma_x \equiv \sigma$, $\sigma_y \equiv 0$, $\tau_{xy} \equiv \tau$ i na podstawie warunku (5.56P) dochodzimy do postaci:

$$\sigma_o = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (5.56B)$$

Na Rys. 5.4b pokazano krzywą graniczną na płaszczyźnie (σ, τ) .

E. Hipotezy odkształceniowe

B1. Hipoteza Saint-Venanta największego wydłużenia jest też określana wzorem w przestrzeni naprężeń. Niżej ograniczamy się tylko do podania jednej wersji hipotezy SV.

$$E\varepsilon_{\max} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3), \quad \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = k. \quad (5.57)$$

B2. Zmodyfikowana hipoteza SV (hipoteza Saint-Venanta - Grashofa) ogranicza zarówno największe wydłużenia jak też skrócenia i ma postać:

$$E\varepsilon_{\max} \equiv \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = k_r, \quad E\varepsilon_{\min} \equiv \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) = -k_c. \quad (5.58)$$

Ta hipoteza jest *dwuparametrowa* i wymaga danych doświadczalnych dla naprężeń zastępczych k_r i k_c na rozciąganie i ściskanie. Granica niebezpieczna jest osiągnięta jeśli jeden z warunków (5.58) jest spełniony.

C. Hipotezy energetyczne

C1. Hipoteza Beltramiiego całkowitej energii sprężystej korzysta ze wzoru (5.32.1), który można odnieść do przestrzeni naprężeń głównych

$$\Phi = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] . \quad (5.59)$$

Jeśli ten wzór napiszemy dla stanu jednoosiowego rozciągania, tj. dla $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ to otrzymujemy:

$$\Phi = \frac{1}{2E}\sigma_o^2 \rightarrow \sigma_o^2 = 2E\Phi_{gr} = k^2 . \quad (5.60)$$

Wracając do wzoru (5.58) otrzymujemy hipotezę Beltramiiego w postaci:

$$\sigma_o^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1), \quad (5.61.1)$$

lub

$$\sigma_o^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (5.61.2)$$

Hipoteza nie znalazła potwierdzenia doświadczalnego toteż nie jest stosowana w obliczeniach inżynierskich

C2. Hipoteza Hubera-Misesa-Hencky'ego (HMH) energii odkształcenia postaciowego ma postać

$$\Phi_f = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_o^2 ,$$

co daje

$$\sigma_o^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] , \quad (5.62)$$

lub w odniesieniu do ogólnej postaci tensora naprężeń:

$$\sigma_o^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] . \quad (5.62.1)$$

W przypadku płaskiego stanu naprężenia (PN) otrzymujemy

$$\sigma_o^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 , \quad (5.63PSN)$$

a dla belek:

$$\sigma_o = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} . \quad (5.63B)$$

Na Rys. 5.4 b pokazano krzywe graniczne (5.63P) i (5.63B) dla hipotezy HMH.

C3. Hipoteza Burzyńskiego (Bu). Ta hipoteza powstała w wyniku prac W. Burzyńskiego (1928) nad uogólnieniami hipotezy HMH. Z kilku wersji hipotezy przytaczamy tylko tzw. przypadek paraboliczny, por. [5], s. 113:

$$\sigma_o = \frac{1}{2\chi} \left[-(\chi - 1)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sqrt{(\chi - 1)^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + 4\chi \sigma_{HMH}^2} \right] , \quad (5.64)$$

gdzie: $\chi = k_c / k_r$, σ_{HMH}^2 – wzór (5.63), odpowiadający hipotezie HMH.

Hipoteza HMH (Hubera (1904) – Misesa (1913) – Hencky'ego (1924)) jest powszechnie stosowana jako kryterium osiągnięcia granicy plastyczności materiału i wrócimy do niej przy omawianiu teorii plastyczności.

Hipotezy HMH i TG

Hipotezy Hubera-Misesa-Henckey'ego (w skrócie HMH) i Tresci-Guesta (TG) znajdują dość dobre potwierdzenie doświadczalne. Odnosi się to do HMH w odniesieniu do stopów metali (stal, aluminium) i betonu w stanach ściskania, oraz hipotezy TG w zakresie rozciągania betonu.

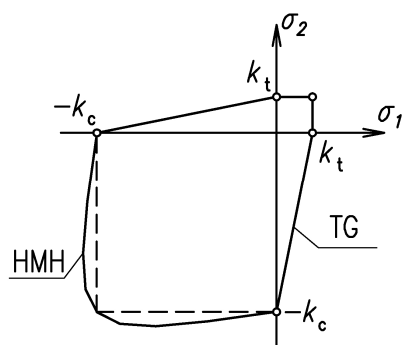
Olbrzymia wartość praktyczna hipotez HMH i TG polega na tym, że dla złożonych stanów naprężeń hipotezy pozwalają ocenić, czy obliczone naprężenie zastępcze σ_o nie przekracza wartości granicznej k . Tak więc bezpieczne stany naprężeń są określane przez nierówność

$$\sigma_o \leq k , \quad (5.65)$$

gdzie k jest przyjmowane jako granica sprężystości $\sigma_{spręż}$ lub plastyczności σ_{plast} .

Na Rys. 5.4 a,b pokazujemy krzywe graniczne dla płaskiego stanu naprężenia na płaszczyźnie naprężeń głównych o wektorze wodzącym $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$. Jeśli koniec tego wektora nie osiągnie krzywej granicznej to jesteśmy w bezpiecznym stanie naprężenia (zakres sprężysty).

Krzywe HMH stosuje się dla stopów metali (w tym stal konstrukcyjna i stopy aluminiowe), gdyż lepiej przylega do wyników badań doświadczalnych niż hipoteza TG. Natomiast hipoteza TG jest stosowana do opisu stanu niebezpiecznego betonu i materiałów kruchych. Na Rys. 5.5 pokazano krzywą graniczną dla płaskiego stanu naprężenia. W obszarze naprężeń ściskających stosuje się hipotezę HMH, a przy pojawieniu się naprężeń rozciągających przyjmuje się hipotezę TG.



Rys. 5.5. Krzywa graniczna dla płaskiego stanu naprężenia w materiale kruchym.