

5. 3. Podstawy energetyczne teorii sprężystości

5.3.1. Ogólne określenia i energia właściwa

Energię ciała C określa wzór

$$E = \Pi + K, \quad (5.26)$$

gdzie: Π – energia potencjalna, K – energia kinetyczna. W przypadku zagadnień statyki pomijamy energię kinetyczną i pozostaje energia potencjalna

$$\Pi = \Pi_w + \Pi_z, \quad (5.27)$$

gdzie: Π_w – energia potencjalna sił wewnętrznych, $\Pi_z = -W$ – energia potencjalna sił zewnętrznych (obciążeń), równa ujemnej wartości pracy tych sił na uogólnionych przemieszczeniach.

W zagadnieniach TS energia potencjalna Π_w jest nazywana energią sprężystą U :

$$\Pi_w = U, \quad (5.28)$$

gdzie:

$$U = \int_{(V)} \Phi dV = \iiint_V \Phi dx dy dz. \quad (5.29)$$

Funkcja podcałkowa Φ jest nazywana *energiją właściwą* (gęstość energii) dla jednostkowej objętości ciała C. Przyrost tej energii, wywołany przyrostem odkształceń określa wzór:

$$\delta \Phi = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}, \quad (5.30)$$

gdzie w ogólności $\delta \varepsilon_{ij}$ są odkształceniami wirtualnymi.

Uwaga: We wzorze (5.30) i dalej wróciliśmy do uporządkowania naprężeń w odniesieniu do kolejności indeksów $i, j = x, y, z$ również w odniesieniu naprężeń stycznych τ_{ij} . W przypadku posługiwania się notacją Voigta (5.2) należy stosować uporządkowanie $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$.

W przypadku materiału idealnie sprężystego, t.zn. dla liniowej zależności naprężeń od odkształceń, energia właściwa jest określona wzorem który przepisujemy w pełnej postaci:

$$\Phi = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (5.31)$$

Energia właściwa jest nazywana również *potencjałem sprężystym*, gdyż różniczkując wzór (5.31) względem odkształceń otrzymujemy naprężenia i odwrotnie. Pokazujemy to na przykładzie materiału izotropowego. Podstawiając zależności (5.17) do (5.30) otrzymujemy:

$$\Phi = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)],$$

(5.32.1)

a po podstawieniu (5.18) dochodzimy do zależności:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} [2\mu (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \mu (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)] = \\ &= \frac{4}{4(1+\nu)(1-2\nu)} \times \\ &= [2(1-\nu) (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + 4\nu (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x) + (1-2\nu) (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)] . \end{aligned} \quad (5.32.1)$$

Obliczamy przykładowe pochodne, liczone względem naprężeń lub σ_x i odkształceń ε_x :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \equiv \varepsilon_x , \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_x} = 2\mu \varepsilon_x + \lambda \vartheta \equiv \sigma_x .$$

które są odpowiednikami odkształceń lub naprężeń.

Potencjał sprężysty możemy też napisać w postaci

$$\Phi = \frac{1}{2} T_\sigma T_\varepsilon = \frac{1}{2} (A_\sigma + D_\sigma) (A_\varepsilon + D_\varepsilon) = \frac{1}{2} A_\sigma A_\varepsilon + \frac{1}{2} D_\sigma D_\varepsilon = \Phi_v + \Phi_f , \quad (5.34)$$

gdzie wykazano, że energię sprężystą można rozdzielić na *energię odkształcenia objętościowego* Φ_v oraz *energię odkształcenia postaciowego* Φ_f :

$$\Phi_v = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \equiv \frac{E}{6(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 , \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \Phi_f &= \frac{1+\nu}{3E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3 (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] = \\ &= \frac{E}{3(1+\nu)} [\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_x + \frac{3}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)] . \end{aligned} \quad (5.36)$$

Korzystając z (5.35) i (5.36) otrzymujemy wzory na całkowitą energię odkształcenia objętościowego i postaciowego:

$$U_v = \int_{(V)} \Phi_v dV , \quad U_f = \int_{(V)} \Phi_f dV . \quad (5.37)$$

5.3.2. Zasada prac wirtualnych i minimum energii potencjalnej

Zasada prac wirtualnych :

Ciało C znajduje się w stanie równowagi jeśli jest spełniona zasada prac wirtualnych

$$\boxed{\delta U = \delta W}, \quad (5.38)$$

gdzie δU jest energią wirtualną a δW jest pracą wirtualną rzeczywistych naprężeń $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ na wirtualnych odkształceniach $\delta \varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$.

Wirtualnymi przemieszczeniami mogą też być *przemieszczenia rzeczywiste, kinematycznie dopuszczalne* (spełniające równania geometryczne i przemieszczeniowe warunki brzegowe):

$$\delta U = \int_{(V)} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_{(V)} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \dots + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV. \quad (5.39)$$

Praca wirtualna obciążeń wyraża się wzorem

$$\delta L = \int_{(V)} X_i \delta u_i dV + \int_{(S)} p_{ni} \delta u_i dS = \int_{(V)} (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV + \int_{(S)} (p_{nn} \delta u_n + p_{ns} \delta u_s) dS \quad (5.40)$$

Z zasady prac wirtualnych wynika warunek zerowania się całkowitej energii potencjalnej

$$\delta(U - W) \equiv \delta \Pi = 0. \quad (5.41)$$

Dla zagadnień liniowych można wykazać, że

$$\delta^2 \Pi > 0, \quad (5.42)$$

skąd wynika **twierdzenie o minimum energii potencjalnej:**

Jeśli ciało C (lub układ mechaniczny) znajduje się w stanie równowagi to całkowita energia potencjalna osiąga wartość minimalną, tj. Π_{\min} .

Energia sprężysta przykłady

— Energia sprężysta U , złożona z energii odkształcenia objętościowego U_v i postaciowego U_f :

$$U = U_v + U_f = \int_{(V)} \phi_v dV + \int_{(V)} \phi_f dV,$$

gdzie energia właściwa wynosi:

$$\begin{aligned}\phi_v &= \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 = \frac{E}{6(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2, \\ \phi_f &= \frac{1+\nu}{3E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] = \\ &= \frac{E}{3(1+\nu)} \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_x + \frac{3}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right].\end{aligned}$$

Przykład 1

Jak zmienia się stosunek energii: U_f / U i U_v / U dla pręta pryzmatycznego rozciąganego siłą P w zależności od wartości współczynnika Poissona ν .

Stan naprężenia jednoosiowego $\sigma_x = P / A \equiv \sigma$ generuje:

$$\begin{aligned}\phi_f &= \frac{1+\nu}{3E} \sigma^2, \quad \phi_v = \frac{1-2\nu}{6E} \sigma^2, \\ \phi &= \phi_f + \phi_v = \left(\frac{1+\nu}{3E} + \frac{1-2\nu}{6E} \right) \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2E}.\end{aligned}$$

Energia sprężysta pręta ze względu na stan naprężenia jednorodnego:

$$U = U_f + U_v = \int_{(V)} \phi_f dV + \int_{(V)} \phi_v dV = \phi_f V + \phi_v V = \frac{\sigma^2}{2E} V,$$

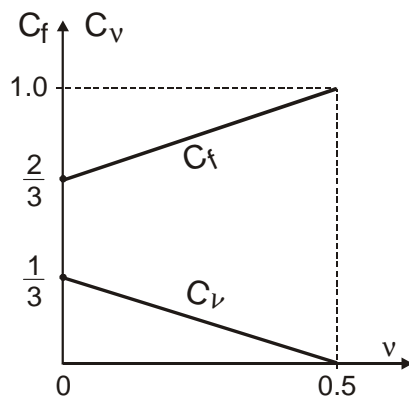
a więc stąd wynika:

$$U = \phi \cdot V = (\phi_f + \phi_v) V.$$

Stosunek energii:

$$C_f = \frac{U_f}{U} = \frac{\phi_f}{\phi} = \frac{1+\nu}{3E} 2E = \frac{2}{3}(1+\nu), \quad C_v = \frac{\phi_v}{\phi} = \frac{1-2\nu}{6E} 2E = \frac{1}{3}(1-2\nu).$$

Na rys.1 podano zależności $C_f(\nu)$ i $C_v(\nu)$



Rys.1 Współczynniki C_f i C_v jako funkcje współczynnika Poissona ν dla pręta swobodnie rozciąganego.

Widać, że dla $\nu \rightarrow 0.5$ będzie $C_v \rightarrow 0$, gdyż materiał jest nieściśliwy i w pręcie pojawi się tylko energia odkształcenia postaciowego.

Przykład 2

Pręt pryzmatyczny ściskany siłą P umieszczony w dopasowanej tulei, idealnie gładkiej (nie występują siły tarcia między prętami i tuleją). Z badać jak się zmieniają współczynniki $C_f(\nu)$ oraz $C_v(\nu)$.

W pręcie występuje jednoosiowy stan odkształcenia

$$\varepsilon_x \neq 0, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0,$$

oraz przestrzenny stan naprężeń, rys.2a

$$\sigma_x = -\frac{P}{A}, \quad \sigma_y = \sigma_z$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = 0 \rightarrow (1-\nu)\sigma_y = \nu\sigma_x,$$

a, więc:

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x = -\frac{\nu}{1-\nu}\frac{P}{A}.$$

Zamiast prowadzić obliczenia w naprężeniach możemy obliczenia wykonać znacznie prościej korzystając ze wzorów (2.4) wyrażonych przez odkształcenia:

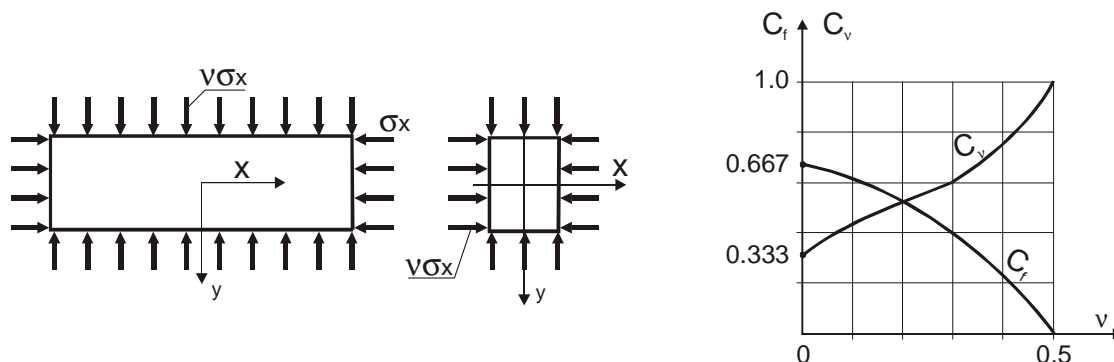
$$\phi_f = \frac{1}{3(1+\nu)}E\varepsilon_x^2, \quad \phi_v = \frac{1}{6(1-2\nu)}E\varepsilon_x^2,$$

$$\phi = \frac{E\varepsilon_x^2}{6}\left(\frac{2}{1+\nu} + \frac{1}{1-2\nu}\right) = \frac{E\varepsilon_x^2}{2}\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

stąd wynikają współczynniki:

$$C_f = \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)}, \quad C_v = \frac{1(1+\nu)}{3(1-\nu)}$$

Na rys. 2. b pokazano zależności $C_f(\nu)$ oraz $C_v(\nu)$. W przeciwieństwie do pręta swobodnego, pręt skrępowany tuleją dla $\nu = 0.5$ ma $C_v = 1.0$, gdyż nie może się odkształcić czysto postaciowo i zachowuje się jak idealnie sztywny.

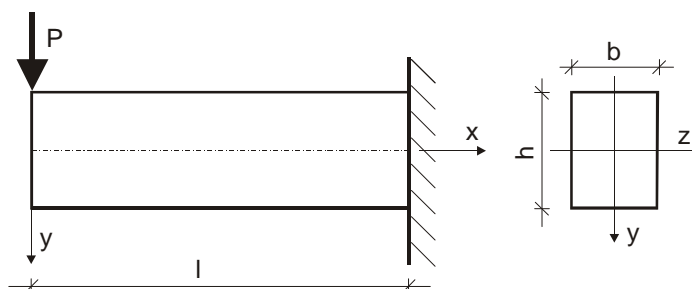


Rys.2.a) ściskanie pręta w dopasowanej tulei, b) współczynniki $C_f(\nu)$ oraz $C_v(\nu)$.

Przykład 3

Obliczyć wartość energii odkształcenia postaciowego i objętościowego dla podanej belki, przyjmując wzory z wytrzymałości materiałów i niżej podane dane.

$b = 1 \text{ cm}$, $h = 2 \text{ cm}$, $l = 20 \text{ cm}$, $P = 10 \text{ kN}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$.



Rys3.

Wzory z wytrzymałości materiałów

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{I_z} y = -\frac{Px}{I_z} y, \quad \tau_{xy} = \frac{QS_z(y)}{I_z b} = \frac{P}{I_z b} \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Z wzorów na energię właściwą

$$\phi_v = \frac{1-2\nu}{6E} \sigma_x^2 = \frac{1-2\nu}{6E} \frac{P^2}{I_z^2} x^2 y^2,$$

$$\phi_f = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2) = \frac{1+\nu}{3E} \left[\frac{P^2}{I_z^2} x^2 y^2 + 3 \frac{P^2}{I_z^2} \frac{1}{4} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 \right]$$

Podstawiamy do wzoru :

$$\begin{aligned} U_v &= \frac{1-2\nu}{6E} \frac{P^2}{I_z^2} \int_{(v)} x^2 y^2 dV = \\ &= \frac{1-2\nu}{6E} \frac{P^2}{I_z^2} \int_0^1 dx \int_{-h/2}^{h/2} dy \int_{-b/2}^{b/2} x^2 y^2 dz = \\ &= \frac{1-2\nu}{6E} \frac{P^2}{I_z^2} \int_0^1 x^2 \left(\int_{-h/2}^{h/2} y^2 \left(\int_{-b/2}^{b/2} dz \right) dy \right) dx = \\ &= \frac{1-2\nu}{6E} \frac{P^2}{I_z^2} b \int_0^1 x^2 \left(\int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \right) dx = \frac{1-2\nu}{6E} \frac{P^2}{I_z} \frac{1^3}{3} \end{aligned}$$

$$U_v = \frac{2}{3E} (1-2\nu) \frac{P^2 1^3}{bh^3} = \frac{2 \times (1-2 \times 0.3)}{3 \times 210 \times 10^8} \cdot \frac{10^2 \times 8 \times 10^{-3}}{10^{-2} \times 8 \times 10^{-6}} = 0.127 \text{ kNm}$$

$$U_f = \frac{1+\nu}{3E} \frac{P^2}{I_z^2} \left[\int_{(v)} x^2 y^2 dV + \frac{3}{4} \int_{(v)} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dV \right] = \frac{4}{3} \frac{1+\nu}{E} \frac{P^2 1^3}{bh^3} \left[1 + \frac{9}{10} \left(\frac{h}{1} \right)^2 \right] = 0.833 \text{ kNm}$$

Całkowita energia i współczynniki C_v i C_f

$$U = 0.960 \text{ kNm},$$

$$C_v = 0.132, \quad C_f = 0.868.$$