Wykład TSIP Rozdz 2 2. Podstawowe pojęcia i twierdzenia

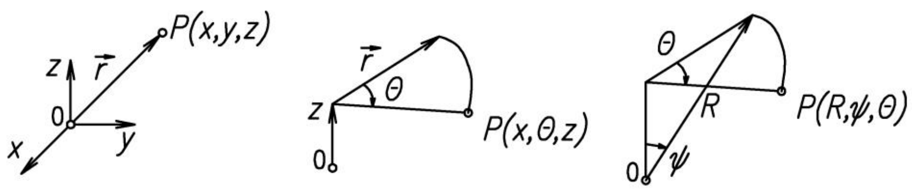
2.1. Układy współrzędnych w przestrzeni 3D

W podręczniku będziemy posługiwali się tylko wybranymi układami współrzędnych, które określają w sposób jednoznaczny położenie punktu *P* w przestrzeni trójwymiarowej, nazywanej dalej przestrzenią 3D. Dalej będziemy posługiwali się najczęściej stosowanymi układami współrzędnych określających położenie punktu *P* w przestrzeni 3D. Są to układy, por. Rys. 2.1:

a) kartezjański (x, y, z),

b) walcowy (r, θ, z),

c) kulisty (R, θ, ψ,).



Rys. 2.1. Układy współrzędnych:
a) kartezjański, b) walcowy, c) kulisty

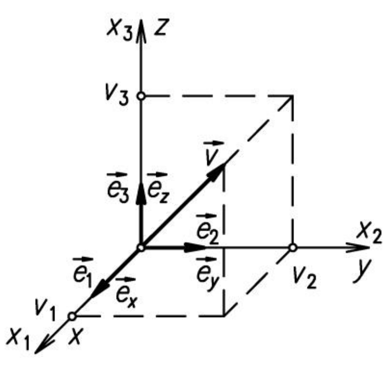
Uwaga: Dalej skupiamy uwagę na układzie kartezjańskim (Rys.2.1a), stosowanym najczęściej w różnych zagadnieniach TSP.

2.2. Układ współrzędnych kartezjańskich i jego transformacja

- **Wersory osi**

Dowolny wektor $\vec{v}$, por. Rys. 2.2, możemy napisać w postaci

$$\vec{v} = v_1\,\vec{e}_1 + v_2\,\vec{e}_2 + v_3\,\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i\,\vec{e}_i = \\ = v_i\,\vec{e}_i \quad \text{– zapis w konwencji sumacyjnej ,} \tag{2.1}$$



Rys. 2.2. Wersory $\vec{e}_i$ i wektor $\vec{v}$ w układzie kartezjańskim

gdzie:

v_i – współrzędne wektora w notacji wskaźnikowej i = 1, 2, 3 lub inżynierskiej i = x, y, z;

$\bar{e}_i$ – wersory (jednostkowe wektory) osi i układu współrzędnych.

Uwagi:

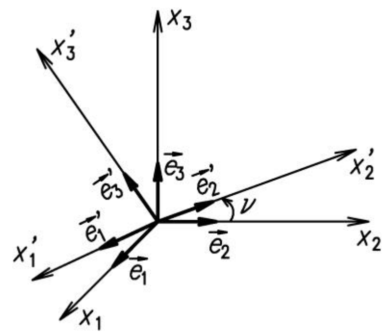
1) Możemy stosować zapis analityczny osi x, y, z lub wskaźnikowy x_1, x_2, x_3, por [15];

2) W zapisie wskaźnikowym możemy łatwo stosować umowę sumacyjną (Einsteina) powtarzającego się wskaźnika. W tej konwencji pomijamy symbol sumowania $\sum_{i=1}^{3}(\bullet)$, por. wzór (2.1).

- **Symbol** (delta) **Kroneckera**

$$\vec{e}_i\,\vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dla } i, j = 1, 2, 3, \\ 0 \text{ dla } i \neq j. \end{cases} \tag{2.2}$$

- Transformacja (obrót) układu kartezjańskiego



Rys.2.3. Transformacja układu współrzędnych (x_1, x_2, x_3) w (x', y', z')

Korzystamy z definicji iloczynu skalarnego wektorów

$$\vec{v}\;\vec{q} = v\,q\cos\theta\,,$$

co przenosimy na wersory:

$$\vec{e}_{i'}\,\vec{e}_j = 1\cdot 1\cdot \cos(i'j) = a_{i'j}\,. \tag{2.3}$$

Z definicji (2.3) wynika wzór

$$\vec{e}_{i'} = \underbrace{\vec{e}_{i'}\,\vec{e}_1\,\vec{e}_1}_{a_{i'1}\,\vec{e}_1} + \underbrace{\vec{e}_{i'}\,\vec{e}_2\,\vec{e}_2}_{a_{i'2}\,\vec{e}_2} + \underbrace{\vec{e}_{i'}\,\vec{e}_3\,\vec{e}_3}_{a_{i'3}\,\vec{e}_3} = \sum_{k=1}^{3}\vec{e}_{i'k}\,\vec{e}_k = \sum_{k=1}^{3} a_{i'\underset{\uparrow}{k}}\,\vec{e}_{\underset{\uparrow}{k}} \quad {\scriptstyle \textit{sumacja Einsteina}}$$

a więc po zastosowaniu notacji sumacyjnej otrzymujemy wzór (pomijamy znak sumy dla powtarzającego się wskaźnika):

$$\vec{e}_{i'} = a_{i'k}\,\vec{e}_k\,, \text{ lub } \vec{e}_i = a_{ik'}\vec{e}_{k'} \tag{2.4}$$

gdzie:

$a_{i'k} = \cos(i'k)$ – kosinus kierunkowy (współczynnik transformacji),

k = 1,2,3 – wskaźnik niemy (wskaźnik sumowania).

Kosinusy kierunkowe są składowymi (współrzędnymi) macierzy transformacji:

$$\mathbf{A} = [a_{i'j}] = \begin{bmatrix} a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3} \\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3} \\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3} \end{bmatrix} . \tag{2.5}$$

Właściwości macierzy transformacji:

1) Przestawienie wskaźników daje współczynniki transformacji odwrotnej,

$$a_{i'j} = \vec{e}_{i'}\, \vec{e}_j = \vec{e}_{j'}\, \vec{e}_i = a_{j'i} . \tag{2.6}$$

2) Łącznie mamy 3×3 = 9 współczynników transformacji, ale obrót układu kartezjańskiego (x_1, x_2, x_3) w układ kartezjański (x_1’, x_2’, x_3’) ma tylko 3 stopnie swobody (3 niezależne kąty obrotu). Wynika stad, że musi istnieć 6 niezależnych związków między współczynnikami $a_{i'j}$. Te związki otrzymujemy z warunku ortogonalności wersorów $\vec{e}_{i'}$ i $\vec{e}_{j'}$, tj.

$$\vec{e}_{i'}\, \vec{e}_{j'} = (a_{i'k}\, \vec{e}_k)(a_{j'p}\, \vec{e}_p) = a_{i'k}\, a_{j'p}\, (\vec{e}_k\, \vec{e}_p) = a_{i'k}\, a_{j'p}\, \delta_{kp} = a_{i'k}\, a_{j'k} ,$$

a więc otrzymujemy

$$\delta_{i'j'} = a_{i'k}\, a_{j'k} , \tag{2.7}$$

co w postaci rozwiniętej prowadzi do 6 równań:

$$\boxed{\begin{array}{ll} a_{1'1}^2 + a_{1'2}^2 + a_{1'3}^2 = 1 , & a_{1'1}\, a_{2'1} + a_{1'2}\, a_{2'2} + a_{1'3}\, a_{2'3} = 0 , \\ a_{2'1}^2 + a_{2'2}^2 + a_{2'3}^2 = 1 , & a_{2'1}\, a_{3'1} + a_{2'2}\, a_{3'2} + a_{2'3}\, a_{3'3} = 0 , \\ a_{3'1}^2 + a_{3'2}^2 + a_{3'3}^2 = 1 , & a_{3'1}\, a_{1'1} + a_{3'2}\, a_{1'2} + a_{3'3}\, a_{1'3} = 0 . \end{array}} \tag{2.8}$$

2.3. Skalary, wektory i tensory

• Skalary i wektory

Skalar jest określany jedną liczbą i *nie podlega zmianie przy transformacji układu.*

Wektor ma 3 współrzędne, odnoszone do przyjętych układów (1, 2, 3) lub (1', 2', 3')

$$\vec{v} = v_i\, \vec{e}_i = v_{j'}\, \vec{e}_{j'} . \tag{2.9}$$

Jeśli uwzględnimy, że $\vec{e}_i = a_{ip'}\, \vec{e}_{p'}$, to po wymnożeniu obustronnym (2.9) przez $\vec{e}_{p'}$ otrzymujemy:

$$v_{j'}\, \vec{e}_{j'}\, \vec{e}_{p'} = a_{ip'}\, v_i \vec{e}_{p'}\, \vec{e}_{p'} = a_{j'i}\, v_i \times 1 .$$

dla $p' = j'$ dochodzimy do *reguły transformacji współrzędnych wektora*

$$\boxed{v_{j'} = a_{j'k} v_k} \tag{2.10}$$

• **Tensory**

W mechanice (ogólniej w fizyce i geometrii) przydatne są obiekty o wielo wskaźnikowych współrzędnych, które podlegają prawom transformacji przy obrocie układu (1, 2, 3) w układ (1', 2', 3'). Takie obiekty (wielkości) nazywamy *tensorami*. Liczbę wskaźników nazywamy *walencją* tensora.

Współrzędne *tensora o walencji dwa* transformuje się według reguły

$$T_{i'j'} = a_{i'k}\, a_{j'l}\, T_{kl}\ , \tag{2.11}$$

a w przypadku ogólnym, dla *walencji n*

$$T_{i'j'\ldots n'} = a_{i'k}\, a_{j'l} \ldots a_{n'r}\ T_{kl\ldots r}\ . \tag{2.12}$$

W szczególności jeśli tensor będzie o walencji cztery to reguła transformacji przyjmie postać:

$$T_{i'j'k'l'} = a_{i'm}\, a_{j'n}\, a_{k'r}\, a_{l's}\, T_{mnrs}\ . \tag{2.13}$$

Tensorami są też skalary (tensory o walencji zero) i wektory (tensory o walencji jeden).

2.4. Algebra tensorów

• *Dodawanie:* Tensory możemy dodawać, tzn. suma współrzędnych tensora o tej samej walencji jest też tensorem podlegającym prawu transformacji

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} \tag{2.14}$$

• *Mnożenie* zwiększa walencję tensora (rozszerzanie tensora)

$$a_i \times b_j = c_{ij} \tag{2.15}$$

• W przypadku *sumowania po* kolejnych dowolnych *wybranych wskaźnikach* obniżamy jego walencję (*zwężanie* lub *kontrakcja tensora*) np.:

$$a_{ii} = s\,,\quad a_{ipp} = v_i\ ,\quad c_{ijkl} b_{kl} = a_{ij}\ \ \text{itd.} \tag{2.16}$$

2.5. Pole tensorowe i różniczkowanie tensorów:

Zakładamy, że w pewnym obszarze współrzędne tensora są ciągłymi funkcjami zmiennych x_i , tj. v_i (x_1, x_2, x_3), które możemy różniczkować:

$$v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad v_{i,jk} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k}, \tag{2.17}$$

gdzie znak różniczkowania oznaczamy kreską (przecinkiem) , przed dolnym indeksem, odpowiadającym zmiennej względem której różniczkujemy.

Na przykładzie $v_{i,j}$ udowadniamy, że pochodne są też tensorami. W tym celu przechodzimy do układu (1', 2', 3'):

$$v_{i',j'} = \frac{\partial v_{i'}}{\partial x_{j'}} = \frac{\partial v_{i'}}{\partial x_s}\frac{\partial x_s}{\partial x_{j'}}, \tag{2.18}$$

i dla zależności

$$x_s = a_{sj'}\, x_{j'} \rightarrow \frac{\partial x_s}{\partial x_{j'}} = a_{sj'} = a_{j's}, \quad v_{i'} = a_{i'p}\, v_p \rightarrow \frac{\partial v_{i'}}{\partial x_s} = a_{i'p}\frac{\partial v_p}{\partial x_s}$$

wzór (2.17)$_1$ przekształcamy do postaci

$$v_{i'j'} = a_{i'p}\frac{\partial v_p}{\partial x_s}a_{j's} = a_{i'p}\, a_{j's} v_{p,s}. \tag{2.18a}$$

Uwaga: W dalszym ciągu będziemy często posługiwali się *tensorami T_{ij} o walencji dwa* (tensory naprężeń i odkształceń). Dalej, w Rozdz.3, właściwości tensora T_{ij} omawiamy na przykładzie tensora naprężeń σ_{ij}.