

Wybrane zagadnienia z TSIP

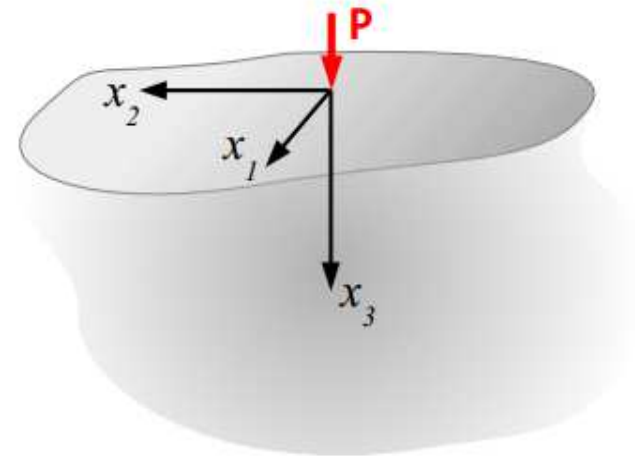
Zagadnienie Boussinesqa

Obciążenie płaszczyzny siłą skupioną

Półprzestrzeń sprężysta jest to ciało o nieskończenie dużych wymiarach, które z jednej strony ograniczone jest półpłaszczyzną.

Obciążenie stanowi siła skupiona przyłożona prostopadle do płaszczyzny

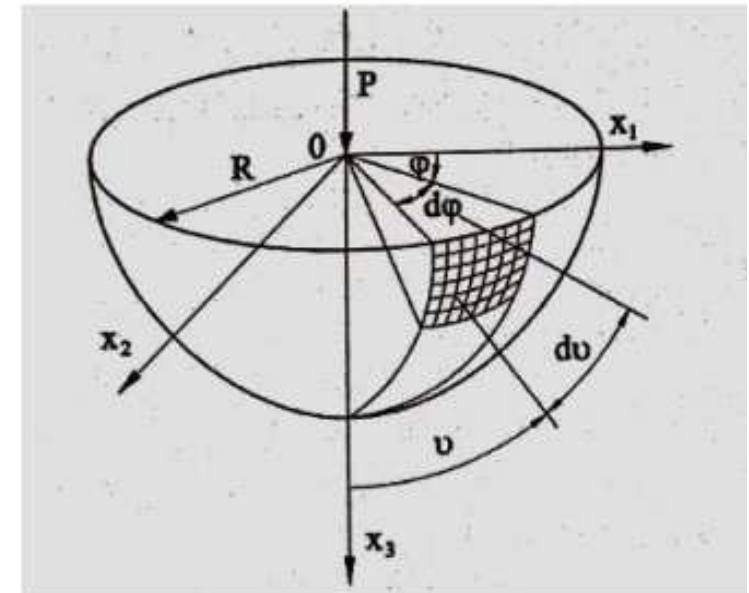
$$\begin{cases} -\infty \leq x_1 \leq +\infty \\ -\infty \leq x_2 \leq +\infty \\ 0 \leq x_3 \leq +\infty \end{cases}$$



Odnieśmy się do zadania Flamanta z siłą prostopadłą do brzegu i przyjmijmy rozkład **radialnych naprężeń** według zależności:

$$\sigma_{RR} = \frac{A \cos \vartheta}{R^2}$$

oznacza to, że powyższe naprężenia zmniejszają się z kwadratem odległości od punktu przyłożenia siły. W punktach osi x_3 występuje ekstremum, zaś zerowanie występuje na płaszczyźnie, ograniczając półprzestrzeń



Myślowo wycięta półkula o promieniu R

Siła działająca na element powierzchniowy $dS = R^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$

$$\sigma_{RR} dS = A \cos \vartheta \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$$

Gdy zrzutujemy wszystkie siły przyłożone do tej półkuli na oś x_3 , otrzymamy zależność która pozwoli obliczyć stałą **A**:

$$P + \iint_S A \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0$$

Stąd otrzymujemy:

$$P = -A \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = -\frac{2\pi A}{3}$$

Czyli:

$$A = -\frac{3P}{2\pi}, \quad \sigma_{RR} = -\frac{3P \cos \vartheta}{2\pi R^2} \quad \text{- jest to potwierdzenie, że wzór } \sigma_{RR} \text{ został przyjęty prawidłowo}$$

Wyznaczenie elementów tensora naprężenia w układzie współrzędnych walcowych (cylindrycznych):

$$R^2 = r^2 + z^2$$

$$\cos \vartheta = \frac{z}{R}$$

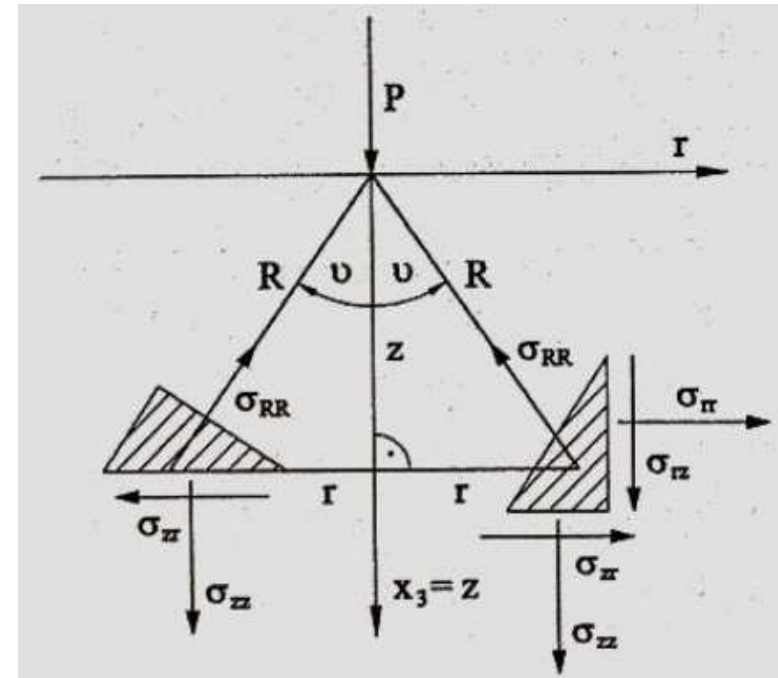
$$\sin \vartheta = \frac{r}{R}$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\vartheta = \frac{r^2}{R^2}$$

Z równowagi elementu trójkątnego wyznaczamy :

$$\sigma_{zz} = \sigma_{RR} \cos^2 \vartheta = -\frac{3Pz^3}{2\pi R^5}$$

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} \sigma_{RR} \sin 2\vartheta = -\frac{3Prz^2}{2\pi R^5}$$



Pozostałe naprężenia wyznaczamy z równań Beltramiego-Michella :

$$\begin{cases} \nabla^2 \sigma_{rr} - \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) = 0 \\ \nabla^2 \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) = 0 \\ \nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial z^2} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) = 0 \\ \nabla^2 \sigma_{rz} - \frac{1}{r^2} \sigma_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{P}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{R(R+z)} - \frac{3r^2 z}{R^5} \right]$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{P}{2\pi} (1-2\nu) \left[\frac{z}{R^3} - \frac{1}{R(R+z)} \right]$$

Tym naprężeniom odpowiadają następujące **odkształcenia** oraz **przemieszczenia**:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})] = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E} [\sigma_{\varphi\varphi} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})] = \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})] = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{rz} = 2\varepsilon_{rz} = \frac{1+\nu}{2E} \sigma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}$$

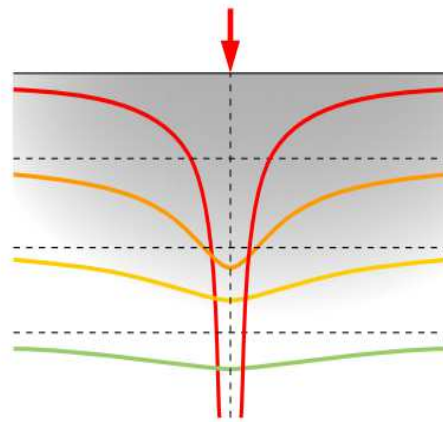
$$u_r = \frac{P(1+\nu)}{2\pi E} \left[\frac{rz}{R^3} - (1-2\nu) \frac{r}{R(R+z)} \right]$$

$$w = \frac{P(1+\nu)}{2\pi E} \left[\frac{2(1-\nu)}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right] + f(r)$$

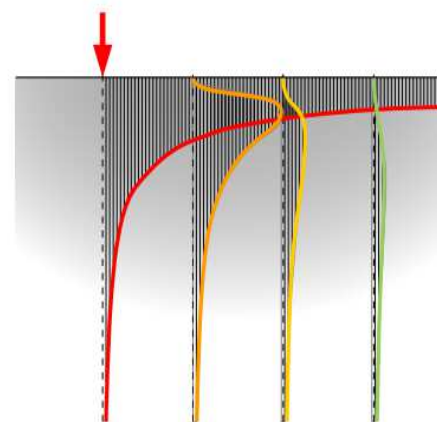
Rozwiązanie Boussinesqa stanowi podstawę większości rozważań dotyczących rozkładu naprężeń i przemieszczeń w zagadnieniach kontaktowych, w szczególności przy wyznaczaniu osiadania ośrodka gruntowego pod fundamentem.

Spośród wszystkich wielkości określanych przez rozwiązanie Boussinesqa, najważniejsze zastosowania dotyczą rozkładu naprężeń w gruncie σ_{33} pod fundamentem oraz przemieszczeń pionowych (osiadań) gruntu u_3 . Mamy więc:

$$u_3 = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{x_3^2}{R^3} + \frac{2(1-\nu)}{R} \right]$$
$$\sigma_{33} = -\frac{3Px_3^3}{2\pi R^5}$$



Rozkład przemieszczeń pionowych u_3

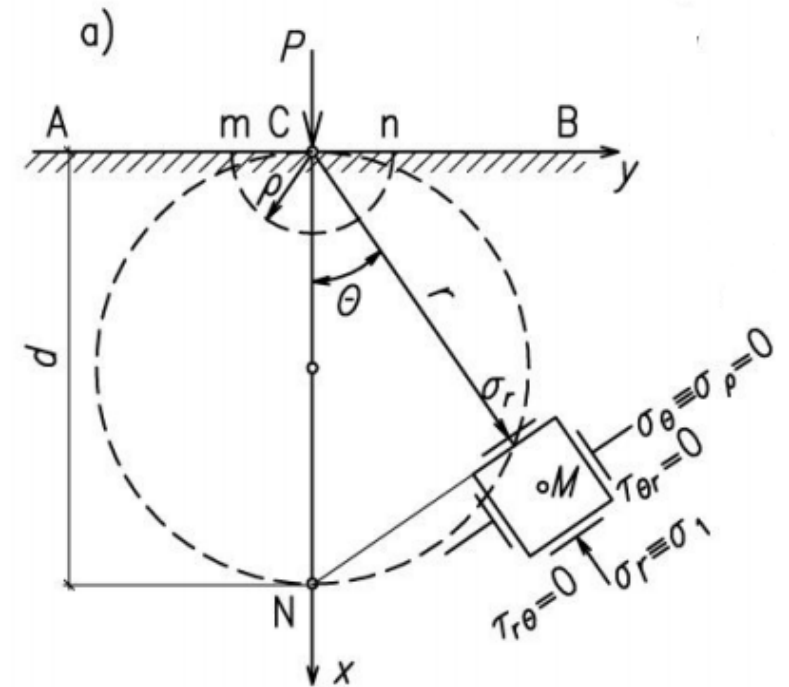
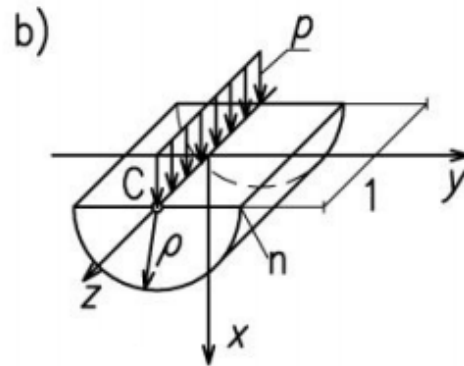


Rozkład naprężeń normalnych σ_{33}

Zagadnienie Flamanta

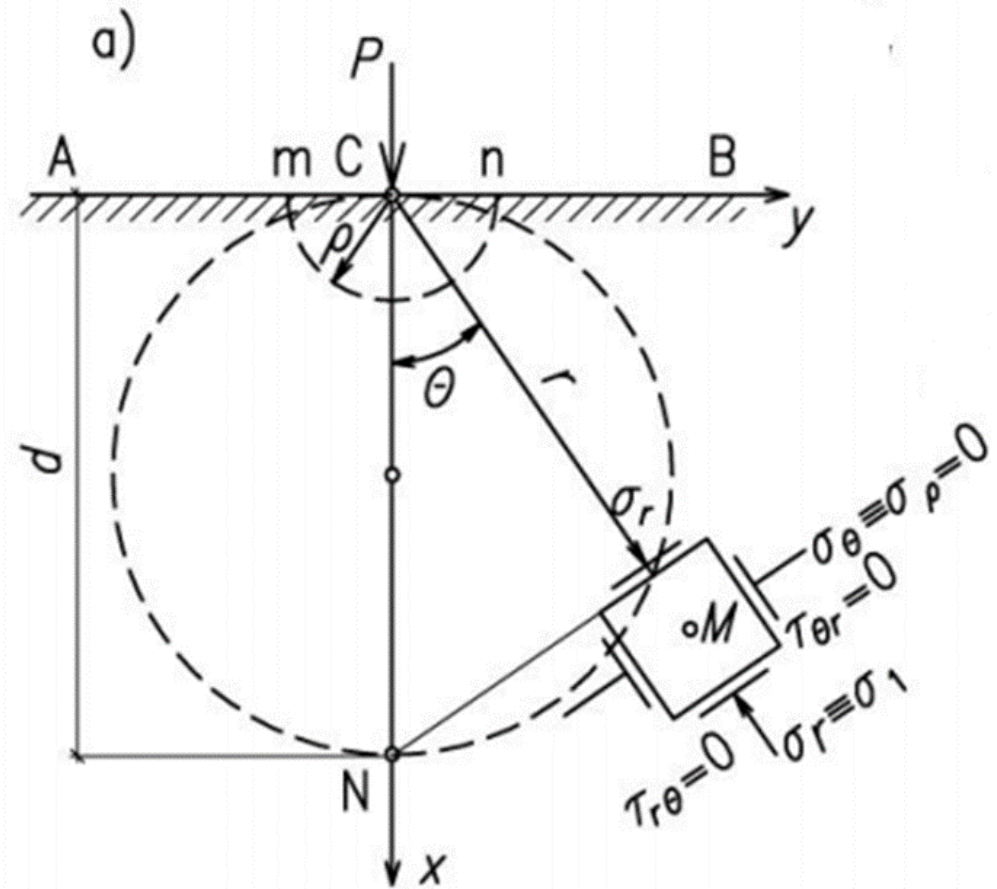
Obciążenie **siłą skupioną**- założenia:

1. Obszar o **małym promieniu ρ** (półkole m - n) wyłączamy z rozważań (siła skupiona P wywołuje w otoczeniu punktu przyłożenia tak **duże naprężenia**, że powodują one **uplastycznienie** lub **uszkodzenie ośrodka**)
2. Sformułowanie **płaskiego stanu naprężeń** dla tarczy o jednostkowej grubości



3. Przyjęcie **stanu naprężenia** w punkcie M półpłaszczyzny sprężystej A-B, które jest określone tylko **jednym** nieznanym **naprężeniem głównym** $\sigma_1 \equiv \sigma_r$, natomiast $\sigma_2 \equiv \sigma_\theta = 0$

4. Pomija się **siły masowe** $R = \Theta = 0$



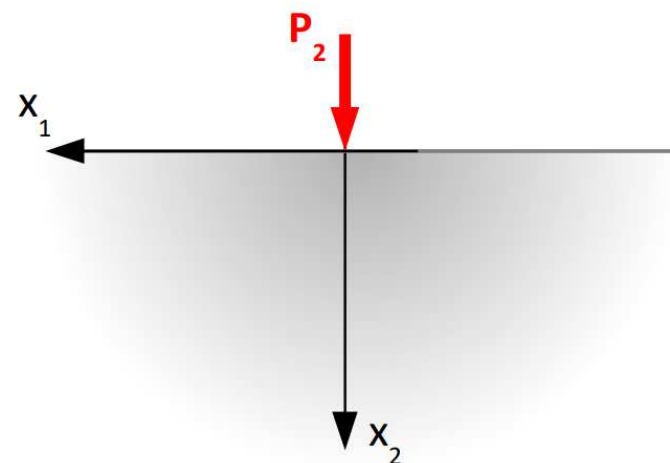
W **biegunowym** układzie współrzędnych nieznane **naprężenia** wynoszą:

$$\sigma_r = -k \frac{\cos\theta}{r}, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0,$$

Gdzie **k** jest współczynnikiem proporcjonalności.

Po przekształceniach otrzymujemy **wzór Flamanta**:

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos\theta}{\pi r}$$



Transformacja naprężeń z układu współrzędnych biegunowych (r, θ) do układu **kartezjańskiego** (x, y) .

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta$$

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta = \sigma_r \sin^2 \theta$$

$$\tau_{xy} = \sigma_r \sin \theta \cos \theta$$

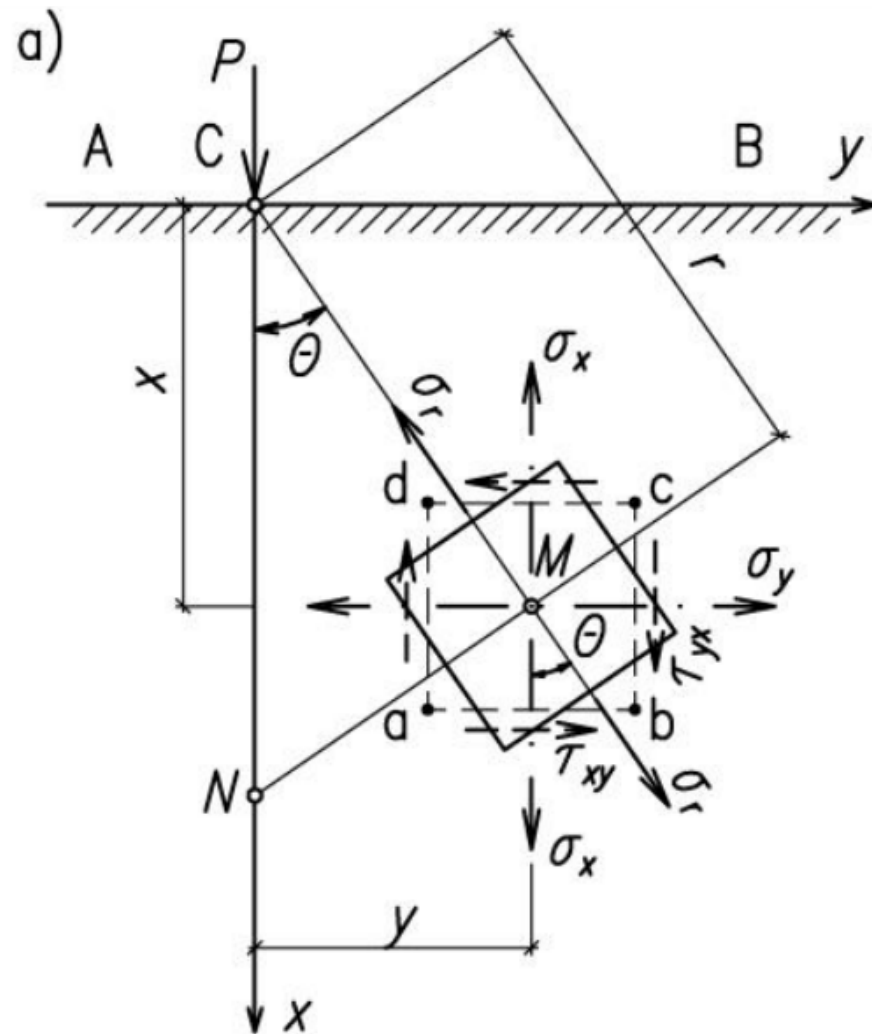
Po zastosowaniu zależności trygonometrycznych:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Otrzymano:

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi} \frac{x y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$



Ze związków konstytutywnych otrzymano **elementy tensora odkształcenia**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{-2P x_1^2 x_2 - \nu x_2^3}{\pi E h (x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \varepsilon_{22} = \frac{-2P x_2^3 - \nu x_1^2 x_2}{\pi E h (x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \varepsilon_{12} = \frac{-2P(1 + \nu) x_1 x_2^2}{\pi E h (x_1^2 + x_2^2)^2} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{-2P(1 + \nu)(1 - \nu)x_1^2 x_2 - \nu x_2^3}{\pi E h (x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \varepsilon_{22} = \frac{-2P(1 + \nu)(1 - \nu)x_2^3 - \nu x_1^2 x_2}{\pi E h (x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \varepsilon_{12} = \frac{-2P(1 + \nu) x_1 x_2^2}{\pi E h (x_1^2 + x_2^2)^2} \end{array} \right.$$

Korzystając z warunku nierozdzielności odkształceń, poprzez **całkowanie odkształceń** otrzymano wzory niezbędne do wyznaczenia **przemieszczeń**:

$$u_1 = -\frac{P_2(1-\nu^2)}{\pi \hat{E}} \left[\frac{1-2\hat{\nu}}{1-\hat{\nu}} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2 x_1}{(1-\nu)(x_1^2+x_2^2)} \right]$$

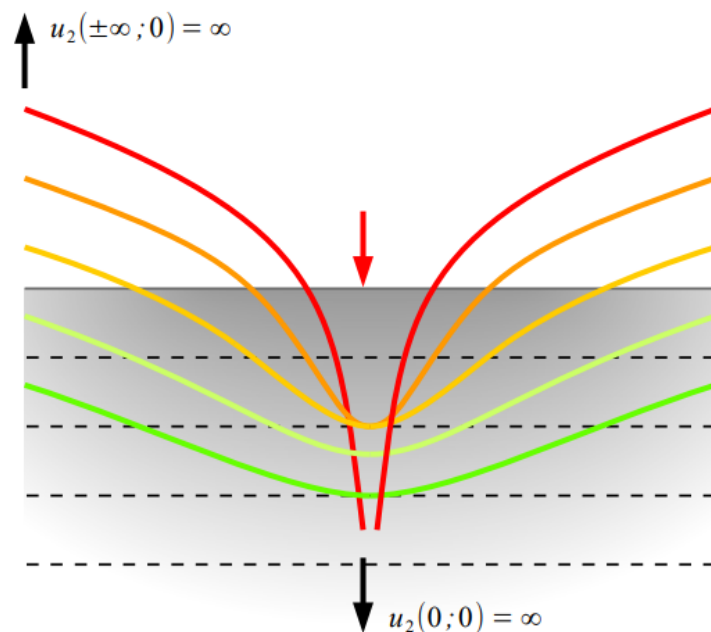
$$u_2 = -\frac{P_2}{\pi \hat{E}} \left[\ln(x_1^2+x_2^2) + \frac{(\hat{\nu}+1)x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)} \right]$$

Gdzie \hat{E} , $\hat{\nu}$ są uogólnionymi **stałymi sprężystymi**, których wartość przyjmujemy zależnie od tego, czy rozpatrywany jest płaski stan naprężenia (**PSN**) czy płaski stan odkształcenia (**PSO**):

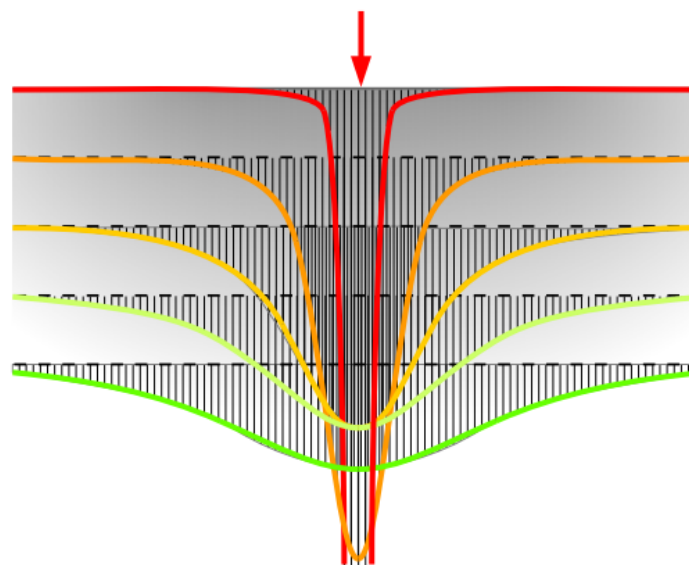
$$\begin{cases} \hat{E} = E \\ \hat{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \end{cases} \Leftrightarrow \text{PSN} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} \hat{\nu} = \nu \\ \hat{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu} \end{cases} \Leftrightarrow \text{PSO}$$

W zagadnieniu **płaskim** niezależnie od doboru stałych całkowania **przesunięcie pionowe** punktów krawędzi półpłaszczyzny zmierza do nieskończoności dla $x_1 \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} u_2 = -\infty$$



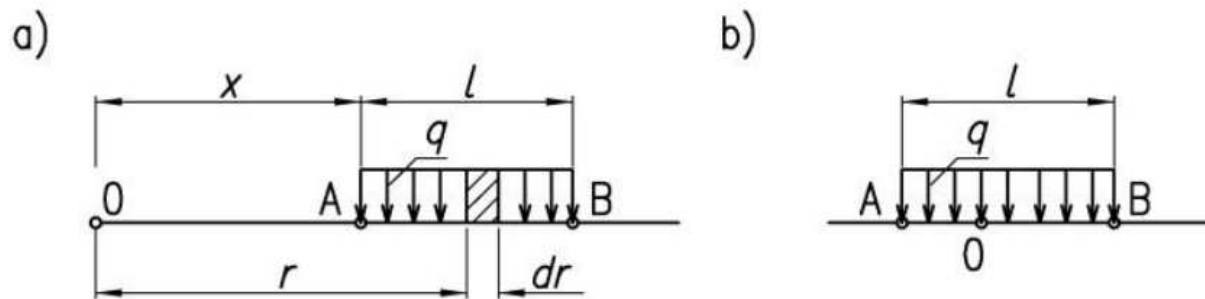
Rozkład przemieszczeń pionowych u_2



Rozkład naprężeń normalnych σ_{22}

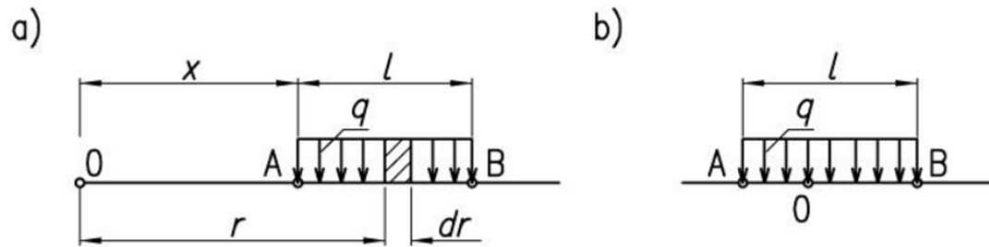
Obciążenie obciążeniem **równomiernie rozłożonym**:

Przyjęto, że obciążenie jest równomiernie rozłożone wzdłuż **odcinka I**, a jego wartość to $q = P/l$.



Rys. 8.10: Obciążenie górnego brzegu tarczy dla przypadków:
a) początek układu współrzędnych O jest poza obszarem przyłożenia obciążenia,
b) punkt O jest w obszarze l

Wzory na **ugięcie krawędzi** dla obu przypadków:



Rys. 8.10: Obciążenie górnego brzegu tarczy dla przypadków:

- a) początek układu współrzędnych O jest poza obszarem przyłożenia obciążenia,
 b) punkt O jest w obszarze l

Przypadek a):

$$\bar{v}_0 = \left[(1 + \xi) \ln \frac{\bar{d}}{1 + \xi} - \xi \ln \frac{\bar{d}}{\xi} \right] + \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}$$

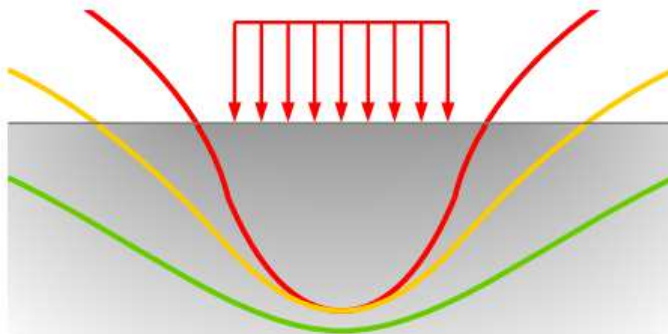
Przypadek b):

$$\bar{v}_0 = 2(1 - \nu^2) \left[(1 - \xi) \ln \frac{\bar{d}}{1 - \xi} + \xi \ln \frac{\bar{d}}{\xi} \right] + \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}$$

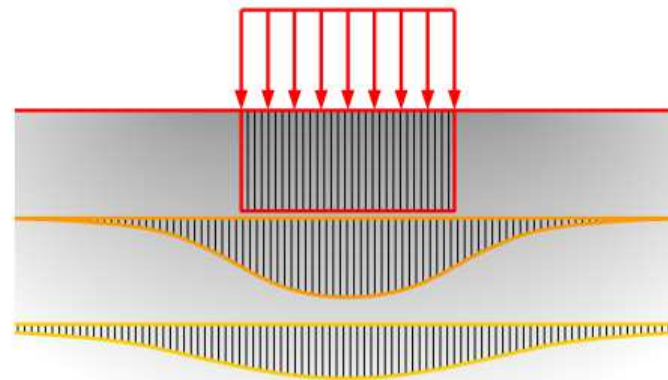
Przyjmując, że obciążenie jednorodne q rozłożone jest **równomiernie** na odcinku $x_1 \in (-L; L)$:

Naprężenie normalne:

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= -\frac{2q}{\pi} \int_{-L}^L \frac{x_2^3}{((x_1 - \xi)^2 + x_2^2)^2} d\xi = \\ &= -\frac{q}{\pi} \left[\frac{(x_1 + L)x_2}{(x_1 + L)^2 + x_2^2} - \frac{(x_1 - L)x_2}{(x_1 - L)^2 + x_2^2} + \operatorname{arctg} \frac{x_1 + L}{x_2} - \operatorname{arctg} \frac{x_1 - L}{x_2} \right] \end{aligned} \quad (6.5.36)$$



Rozkład przemieszczeń pionowych u_2



Rozkład naprężeń normalnych σ_{22}

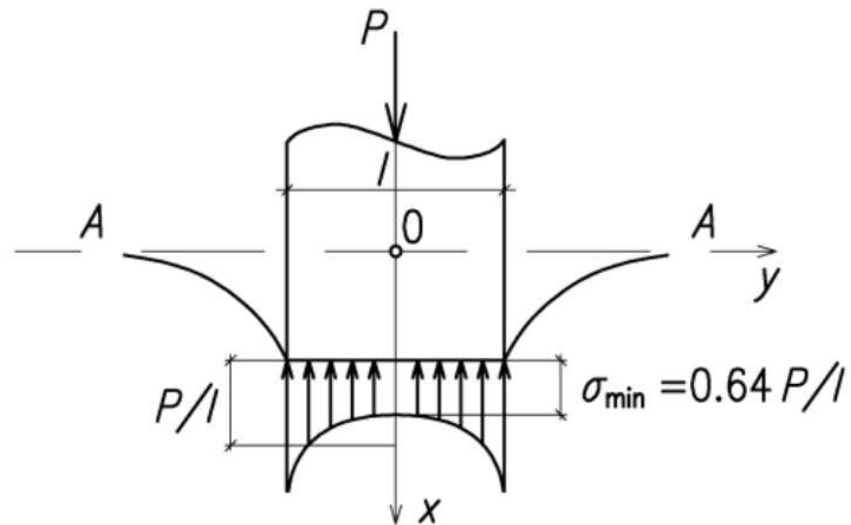
Wciskanie za pomocą siły P nieskończenie **sztywnego** (nieodkształcalnego) **stempla** w półprzestrzeń sprężystą

Dla **stałego ugięcia** pod stemplem o wartości $v_{0,Max}$ naprężenie kontaktowe σ_x ma rozkład zmienny, opisywany wzorem:

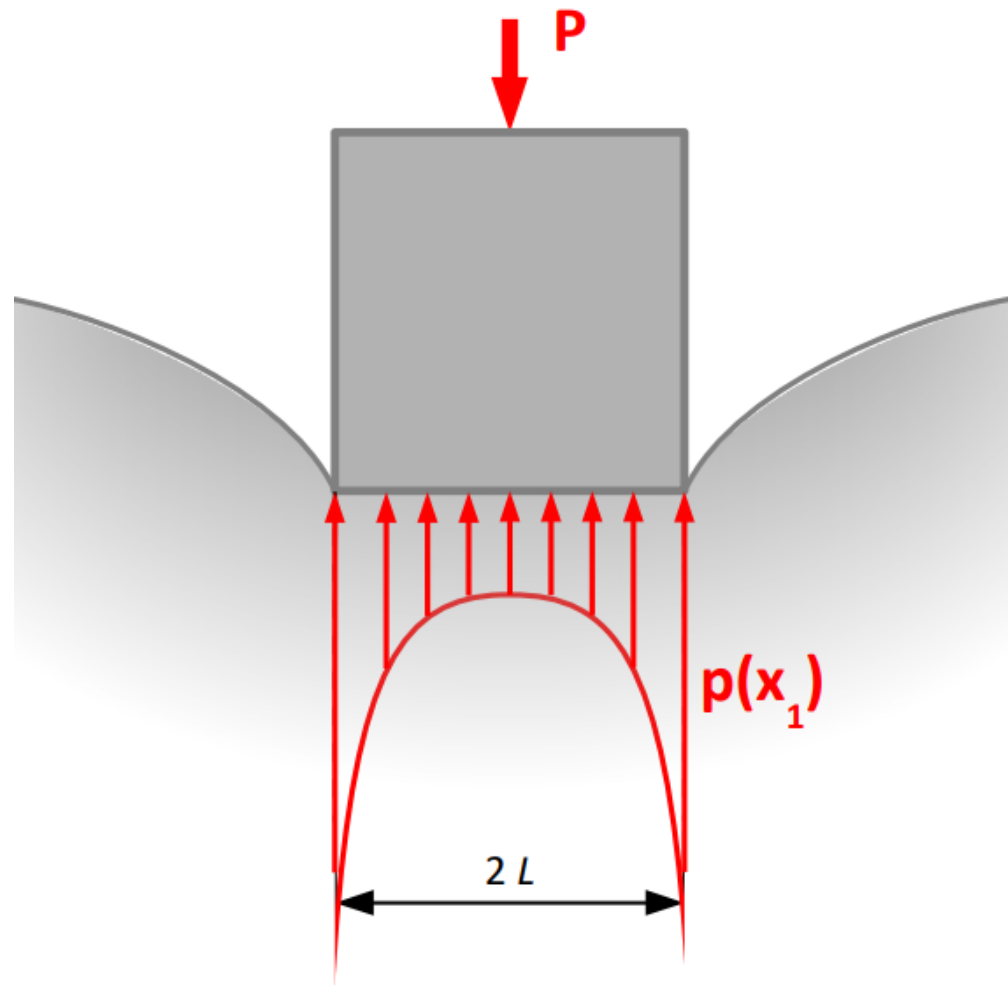
$$\sigma_x = \frac{P}{\pi \sqrt{l^2/4 - y^2}}$$

Dla $y = 0$ - **minimalna wartość** naprężenia kontaktowego:

$$\sigma_{x \min} = \frac{2P}{\pi l} \approx 0.64 P/l$$



Przybliżony rozkład naprężeń kontaktowych



Rozwiązanie to jest **osobliwe** – naprężenia kontaktowe przy narożach stempla osiągają wartości **nieskończone**.

Rozwiązania równań Lamé'go

- fale sprężyste – fale podłużne

Jednym ze sposobów rozwiązywania równań różniczkowych jest takie ich przekształcanie, aby otrzymać równanie, **dla którego rozwiązanie jest skądinąd znane.**

Wartościowe wnioski płyną z przekształceń równań przemieszczeniowych.

$$Gu_{i,jj} + (G + \lambda)u_{j,ji} - \rho\ddot{u}_i = 0 \quad i=1,2,3 \quad - \text{Różniczkujemy równanie względem zmiennej } x_k$$

Otrzymujemy:

$$Gu_{i,jjk} + (G + \lambda)u_{j,jik} - \rho\ddot{u}_{i,k} = 0$$

Przekształcamy równanie:

$$G u_{j,ij} + (G + \lambda) u_{j,jii} = G u_{j,jii} + (G + \lambda) u_{j,jii} = (2G + \lambda) u_{j,jii}$$

W powyższym równaniu podstawiamy:

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = u_{j,j}$$

Gdzie θ jest **dylatacją**, tj. **odkształceniem objętościowym**.

$$(2G + \lambda) \theta_{,jj} - \rho \ddot{\theta} = 0$$

Skąd:

$$c_p^2 \nabla^2 \theta - \ddot{\theta} = 0 \quad \text{gdzie} \quad c_p = \sqrt{\frac{2G + \lambda}{\rho}}$$

A zatem **w przypadku braku sił masowych dylatacja spełnia równanie falowe**, tj. odkształcenie objętościowe $\theta = \nabla \cdot u$ **w izotropowym ośrodku liniowo-sprężystym** rozprzestrzenia się tak jak fala sferyczna.

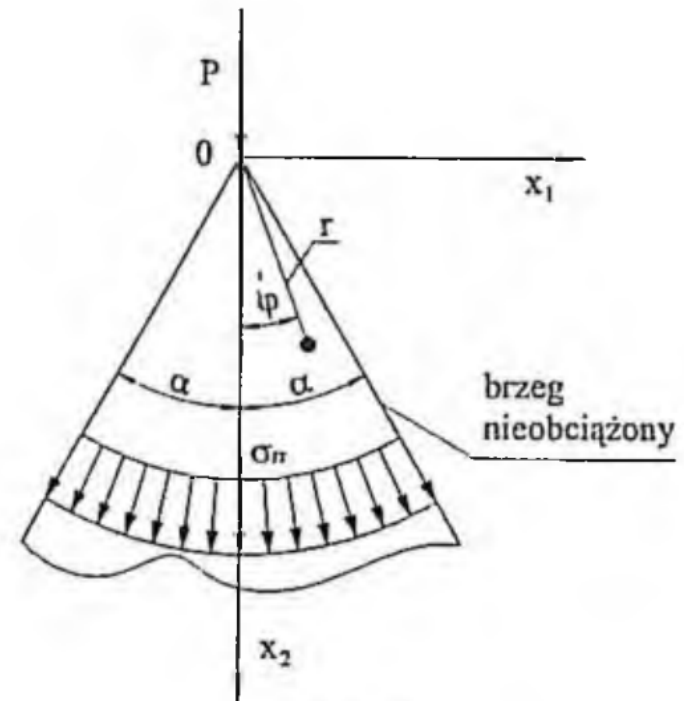
Prędkość propagacji:

$$c_P = \sqrt{\frac{2G + \lambda}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad [c_P] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Uzyskany rezultat pozwala nam przypuszczać, że w **ciałach sprężystych** mogą propagować zaburzenia (odkształcenia, naprężenia, przemieszczenia), których charakter jest zbliżony lub taki sam jak np. drgań akustycznych (fala sferyczna). Zaburzenia te nazywać będziemy **falami sprężystymi**. Fale sprężyste opisywane równaniem nazywamy **falami podłużnymi** lub **falami P**.

Zagadnienie sprężystego klina (zagadnienie Michella)

Cienka **tarcza sprężysta** ma kształt **klina** nieskończonego. Jej obciążenie stanowi **siła skupiona** przyłożona w **wierzchołku** klina.



Warunki równowagi klina:

$$\begin{cases} a) \sum x_1 = 0 \\ b) \sum x_2 = 0 \\ c) \sum M_0 = 0 \end{cases}$$

Równania (a) i (c) są spełnione **tożsamościowo**.

Równanie (b) ma postać:

$$2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} \sigma_{rr} \cos\varphi r d\varphi + P = 0$$

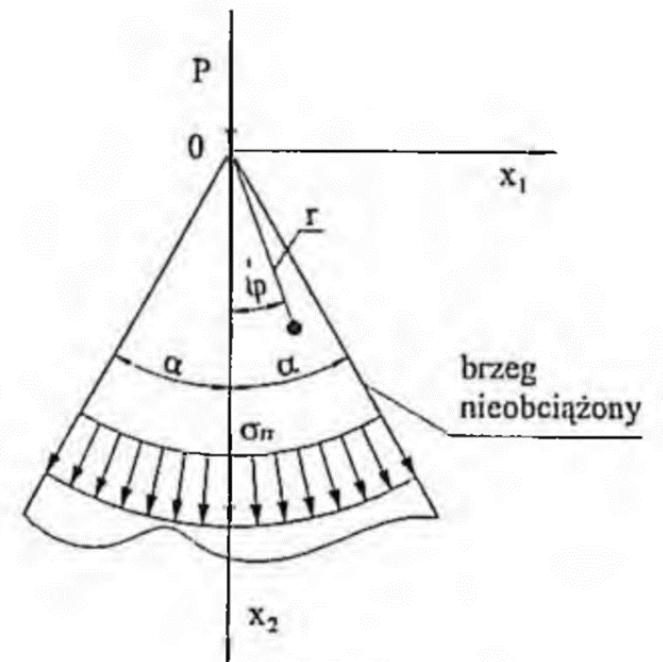
Wstawiając σ_{rr} ostatecznie otrzymujemy:

$$\sigma_{rr} = \frac{-2P \cos\varphi}{(2\alpha + \sin 2\alpha)r} \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 0, \sigma_{r\varphi} = 0$$

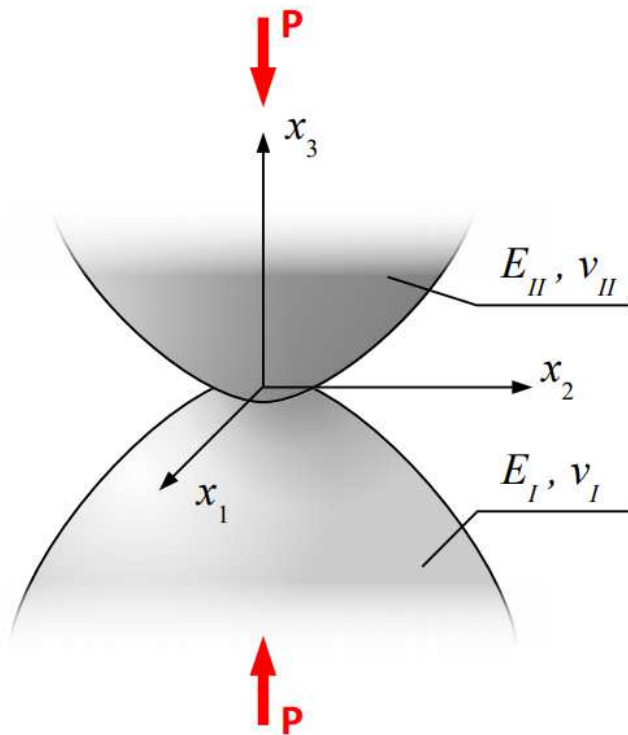
Z poprzednich slajdów:

$$\sigma_{rr} = \frac{C_1 \cos\varphi}{r}$$

$$r \neq 0$$



Zagadnienie kontaktowe Hertza



Rozważmy stan naprężenia w strefie kontaktu dwóch ciał o:

- ustalonej **geometrii**
- wykonanych z dwóch różnych **nieważkich** (brak sił masowych), **jednorodnych i izotropowych** materiałów- liniowo-sprężystych
- dociskanych do siebie przez **siłę** o ustalonej wielkości (siła dociskająca znajduje się nieskończenie daleko strefy kontaktu)
- kontakt ma charakter **beztarciowy**, tj. że w strefie kontaktu nie występują jedynie normalne do powierzchni obydwu ciał
- najbliższe **otoczenie** strefy kontaktu jest **wielokrotnie mniejsze** od **wymiarów** każdego ze stykających się ciał
- obydwa ciała stykają się tylko w **jednym punkcie**
- zagadnienia **osiowosymetryczne**
- Przyjmujemy **biegunowy** układ współrzędnych, którego **początek** znajduje się w punkcie **styczności** ciał

Przy założeniu **punktowego kontaktu** przed obciążeniem **geometria** każdego z ciał może być aproksymowana **szeregiem potęgowym** w otoczeniu punktu kontaktu.

Położenie punktów powierzchni zewnętrznej ciała pierwszego opisuje **osiowo-symetryczna** funkcja $z = f_I(r)$, a w otoczeniu punktu styczności $r=0$ (szereg Taylora):

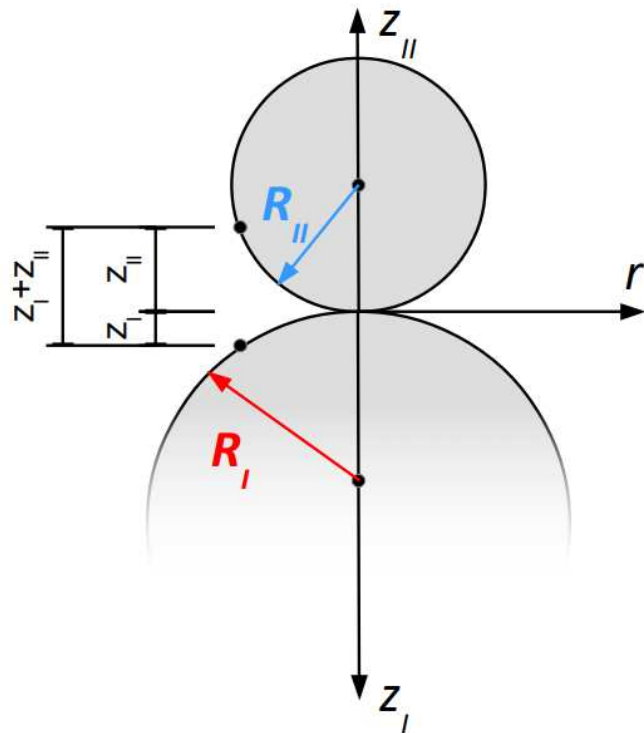
$$z_I \approx f_I(0) + \frac{r}{1!} \left. \frac{d f_I}{d r} \right|_{r=0} + \frac{r^2}{2!} \left. \frac{d^2 f_I}{d r^2} \right|_{r=0} + \dots$$

Uwzględnijmy jedynie tych **trzy pierwsze wyrazy**, w punkcie styczności $f_I(0) = 0$, r w **nieparzystej potędze**, musi być równe **0**. Druga pochodna jest natomiast miarą krzywizny κ_I :

$$\left. \frac{d^2 f_I}{d r^2} \right|_{r=0} \approx \kappa_I = \frac{1}{R_I} \quad z_I(r) \approx \frac{1}{2 R_I} r^2$$

R_I – **promień krzywizny** powierzchni zewnętrznej ciała I w punkcie styczności

Analogiczne przybliżenie możemy zastosować do powierzchni zewnętrznej drugiego ciała.



Odległość 2 dowolnych punktów tych powierzchni, odpowiadających tej samej wielkości promienia r :

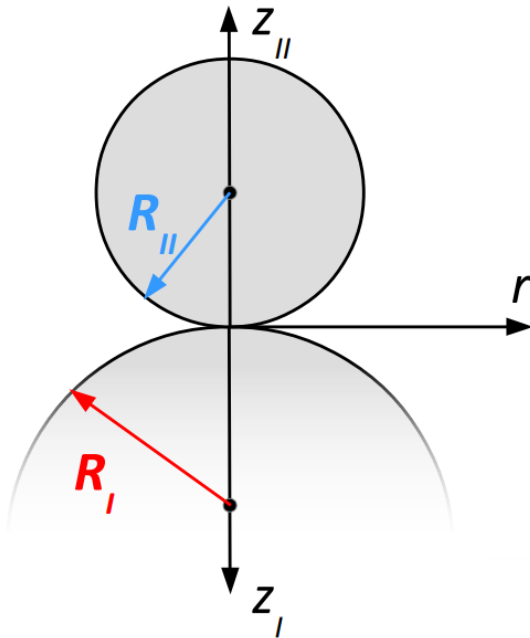
$$z_I + z_{II} = \left(\frac{1}{2R_I} + \frac{1}{2R_{II}} \right) r^2 = \frac{R_I + R_{II}}{2R_I R_{II}} \cdot r^2 = \beta r^2$$

z_I, z_{II} - są dodatnią miarą **odległości punktów** powierzchni każdego ciała **od płaszczyzny styku** tych ciał

Współczynnik $\beta > 0$ określa geometrię zagadnienia

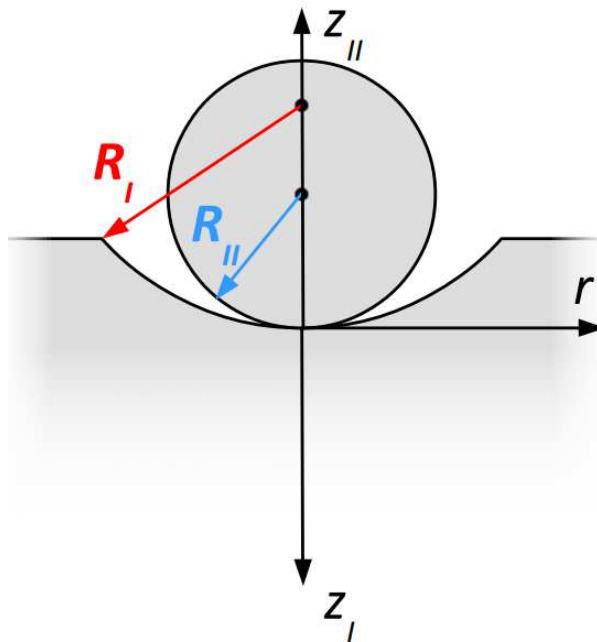
- Kontakt dwóch powierzchni wypukłych:

$$\beta = \frac{\kappa_I + \kappa_{II}}{2} = \frac{R_I + R_{II}}{2 R_I R_{II}}$$



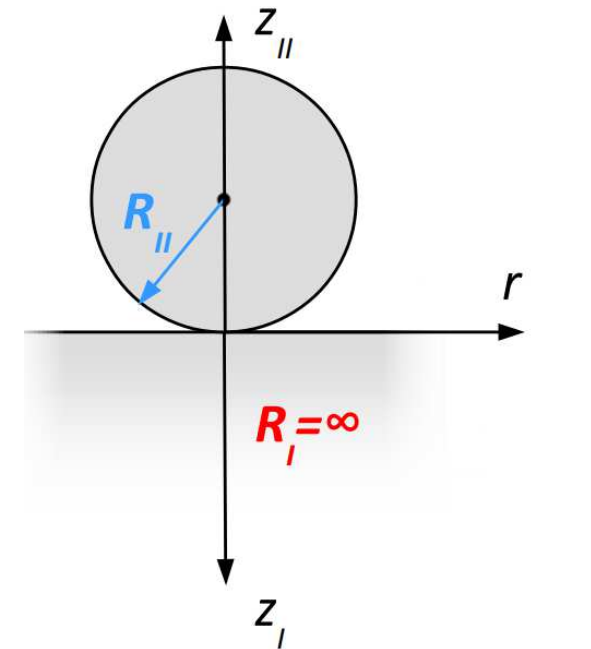
- Kontakt powierzchni wypukłej i wklęsłej ($R_I > R_{II}$):

$$\beta = \frac{(-\kappa_I) + \kappa_{II}}{2} = \frac{R_I - R_{II}}{2 R_I R_{II}}$$



- Kontakt powierzchni wypukłej i płaskiej:

$$\beta = \frac{\kappa_{II}}{2} = \frac{1}{2 R_{II}}$$



Przyjmować będziemy, że:

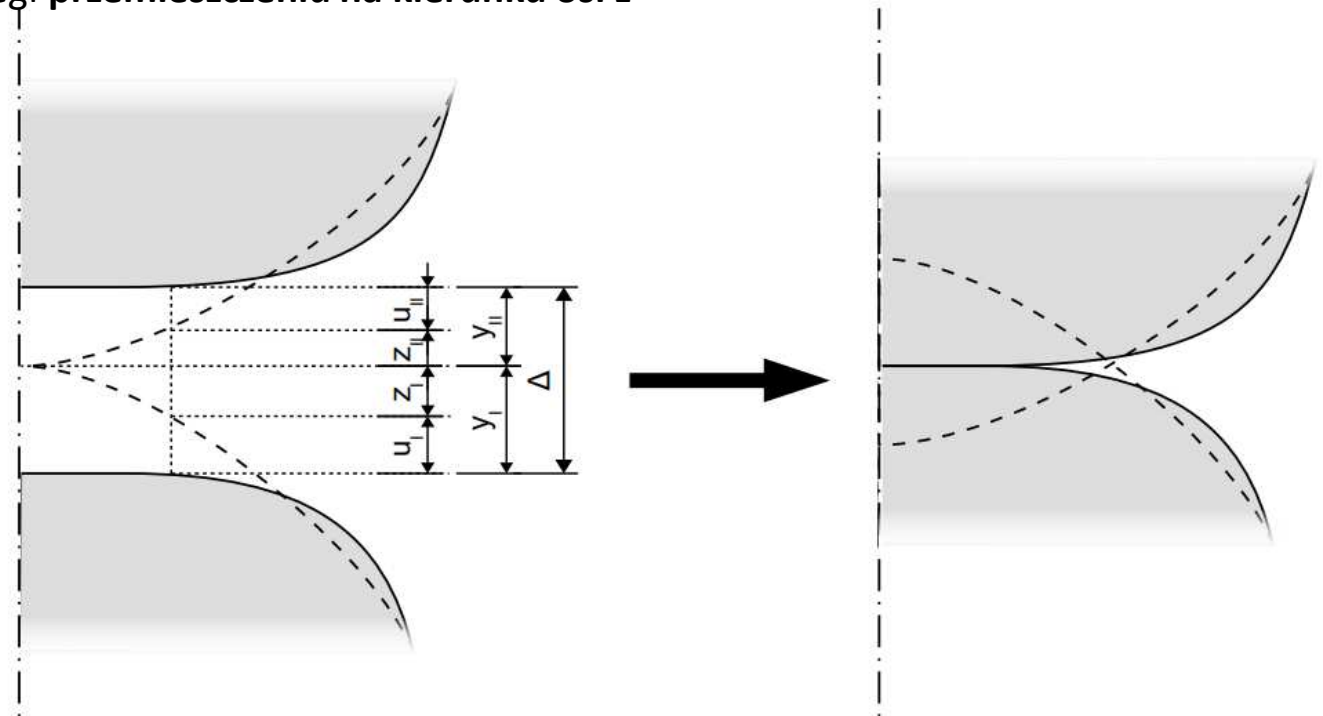
- **powierzchnie zewnętrzne** obydwu ciał w strefie kontaktu są bardzo **bliskie powierzchni płaskich**, równoległych do płaszczyzny $z=0$
- ograniczenie naszych rozważań do **nieskończenie małego otoczenia punktu styczności**, stanowi podstawę do aproksymowania przemieszczeń punktów powierzchni tych ciała **rozwiązaniem Boussinesqa**
- każdy z punktów powierzchni ciała uległ **przemieszczeniu na kierunku osi z**

Równanie powierzchni każdego z tych ciał po deformacji wyznaczamy z:

$$y_I(r) = z_I(r) + u_I(r)$$

$$y_{II}(r) = z_{II}(r) + u_{II}(r)$$

y_I i y_{II} - **odległość** punktów powierzchni ciała zdeformowanego („spłaszczonego”) od powierzchni $z=0$



Założmy, że wewnątrz strefy kontaktu **nie ma punktów**, w których kontakt by **nie zachodził**.

$$y_I + y_{II} = \Delta = \text{const.}$$

$$z_I + z_{II} + u_I + u_{II} = \Delta$$

Korzystając z wcześniejszej zależności:

$$z_I + z_{II} = \left(\frac{1}{2R_I} + \frac{1}{2R_{II}} \right) r^2 = \frac{R_I + R_{II}}{2R_I R_{II}} \cdot r^2 = \beta r^2$$

Możemy zapisać wzór:

$$u_I + u_{II} = \Delta - \beta r^2$$

Można zastosować na tym etapie **funkcje Greena** oraz przyjąć, że strefa kontaktu jest **kołem** o pewnym nieznanym **promieniu a**- będzie to **obszar całkowania** funkcji Greena z **obciążeniem zewnętrznym**.

W strefie tej występuje nieznaną **osiowo-symetryczny ciągły rozkład naprężeń kontaktowych p(r)**, który przyjmujemy jako obciążenie zewnętrzne w rozwiązaniu Boussinesqa.

Po zastosowaniu powyższych założeń otrzymano:

$$(k_1 + k_2) \iint_{K(x=0;a)} \frac{p(\xi_1; \xi_2)}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}} d\xi_1 d\xi_2 = \Delta - \beta r^2$$

$$k_I = \frac{1 - \nu_I^2}{\pi E_I}, \quad k_{II} = \frac{1 - \nu_{II}^2}{\pi E_{II}}$$

W wyrażeniu tym występują trzy **niewiadome wielkości**:

- wielkość strefy kontaktu - promień a
- przesunięcie Δ
- rozkład naprężeń kontaktowych p(r)

Przyjmując równości sumy układu naprężeń kontaktowych i zewnętrznej siły dociskającej:

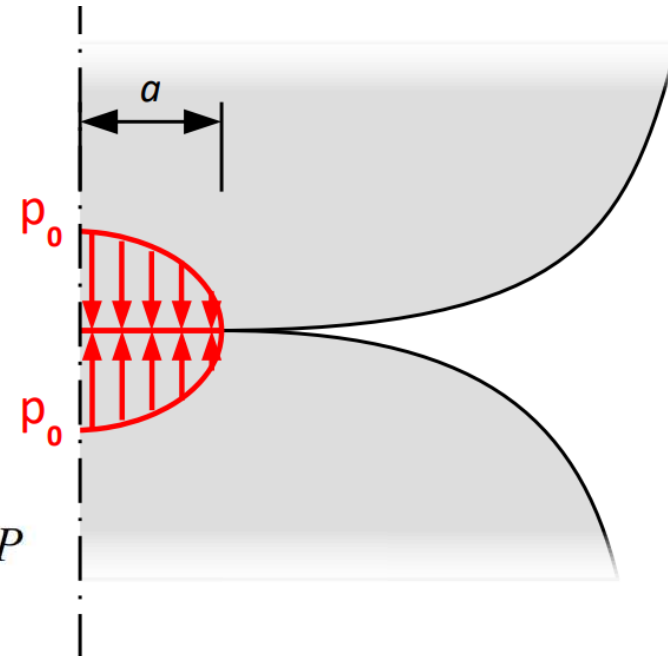
$$\text{a) } \iint_{K(\mathbf{x}=\mathbf{0}; a)} p(\xi_1; \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = P$$

Propozycją Hertza było także, aby przyjąć rozkład eliptyczny rozkład naprężeń kontaktowych.

$$\text{b) } p(r) = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$$

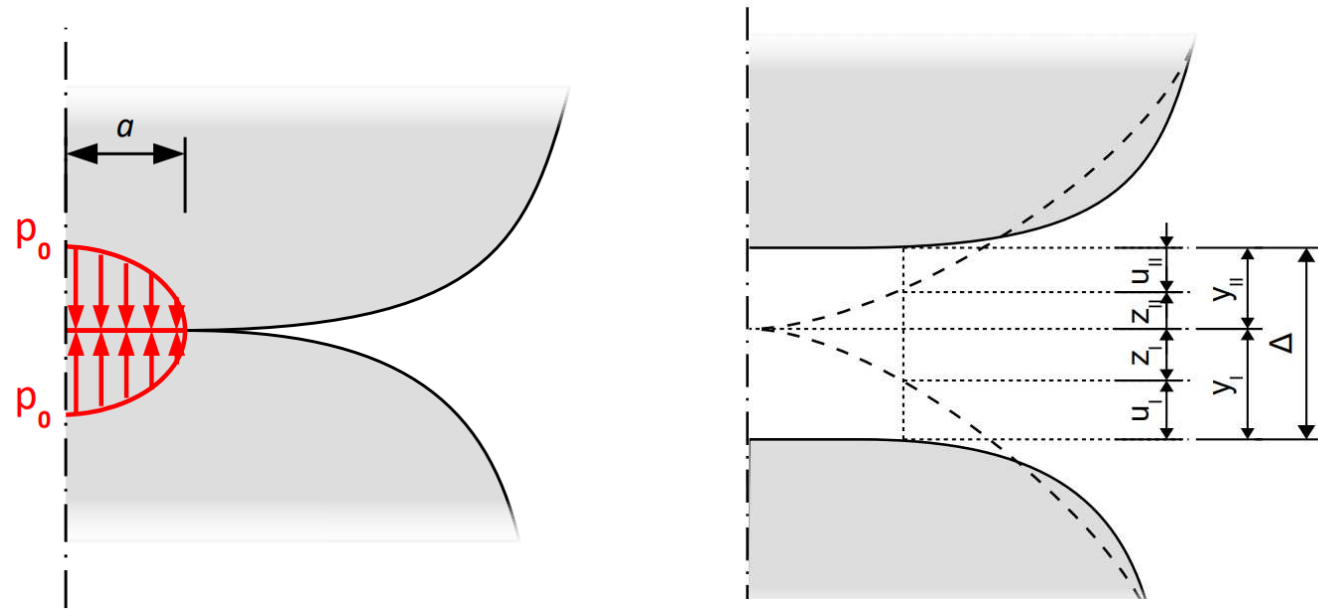
Wstawiając równanie b) do równania a):

$$p_0 \iint_{K(\mathbf{x}=\mathbf{0}; a)} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} dA = \frac{p_0}{a} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\phi = \frac{2}{3} \pi a^2 p_0 = P$$



Zatem otrzymujemy wzór:

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2}$$



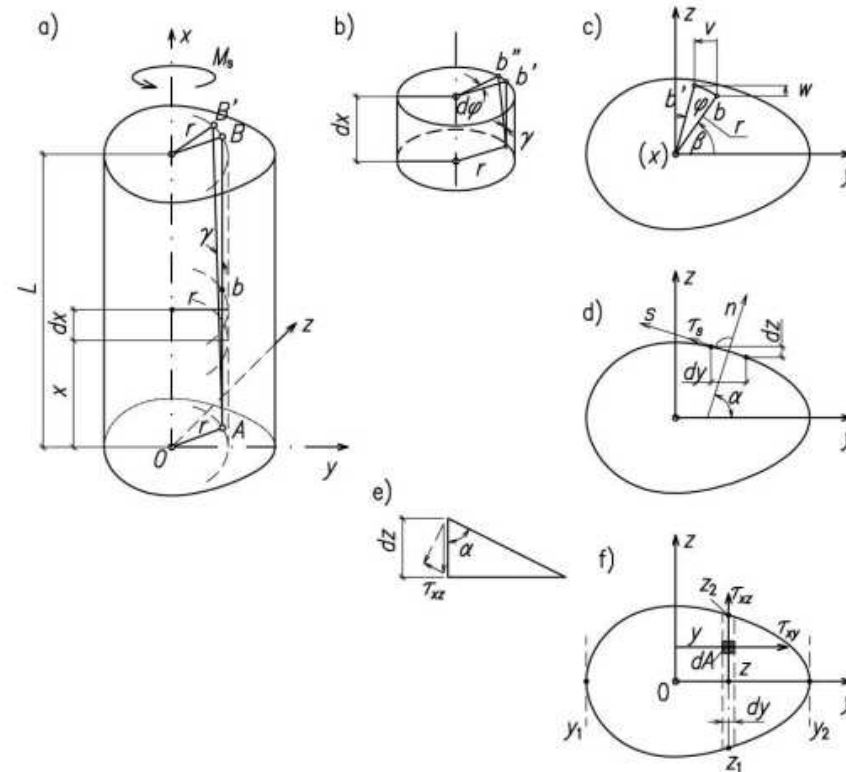
Wykorzystuje się tutaj także metody potencjałowe wywodzące się z analizy zagadnień elektromagnetycznych. Po wielokrotnym całkowaniu ze związków tych wyznaczamy promień strefy kontaktu- a oraz zagłębienie Δ .

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} P \left(\frac{1-\nu_I^2}{E_I} + \frac{1-\nu_{II}^2}{E_{II}} \right) \frac{R_I R_{II}}{R_I + R_{II}}}$$

$$\Delta = \sqrt[3]{\frac{9}{16} P^2 \left(\frac{1-\nu_I^2}{E_I} + \frac{1-\nu_{II}^2}{E_{II}} \right)^2 \frac{R_I + R_{II}}{R_I R_{II}}}$$

Skrećanie prętów pryzmatycznych

- Rozpatrujemy pręt pryzmatyczny **zwarty**, o dowolnym **jednospójnym przekroju poprzecznym**
- Zakładamy, że u podstawy (**dla $x = 0$**) pręt ma **utwierdzony** przekrój i jest obciążony **momentem skręcającym M_s**



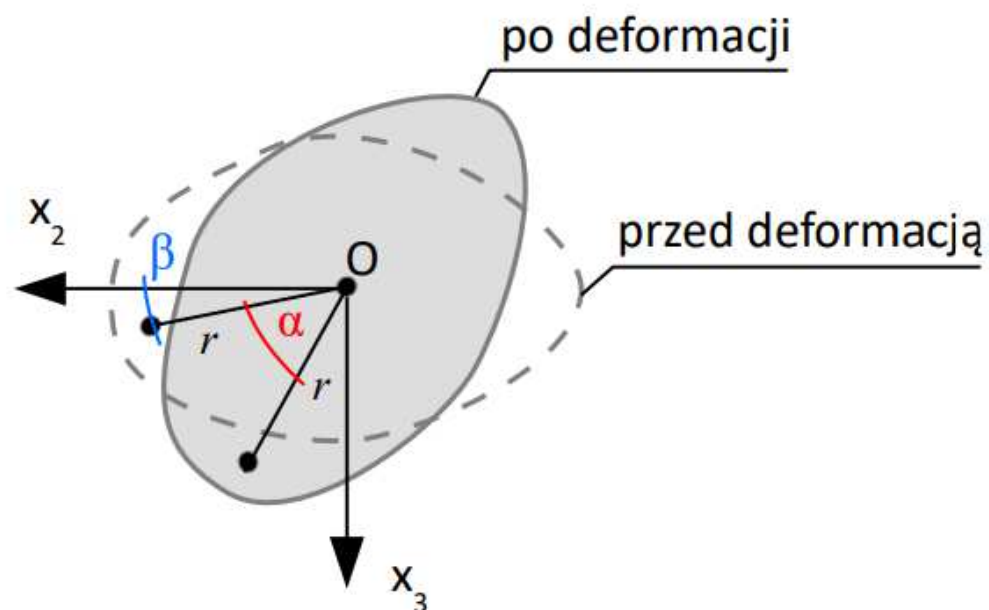
Rys.8.13: a) Skrećany pręt pryzmatyczny, b) Skrećanie elementu pręta, c) Przekrój poprzeczny pręta, d) Obciążenia brzegowe konturu pręta, e) Elementarny trójkąt brzegowy, d) Naprężenia wewnątrz pręta

Każdy przekrój pręta $x_1 = \text{const.}$ doznaje **sztynnego obrotu** o pewien **kąt α** wokół swojego środka ciężkości. Oznacza to, że dowolny **punkt przekroju**, który we współrzędnych **biegunowych** o początku w środku ciężkości przekroju ma przed deformacją **współrzędne**:

$$\begin{cases} x_2 = r \cos \beta \\ x_3 = r \sin \beta \end{cases}$$

po deformacji będzie miał współrzędne:

$$\begin{cases} x'_2 = r \cos(\beta + \alpha) \\ x'_3 = r \sin(\beta + \alpha) \end{cases}$$



Ścianka początkowa **nie doznaje obrotu**, zaś każda następną doznaje obrotu o **kąt $\alpha(x_1)$** proporcjonalny do odległości tego przekroju od ścianki początkowej, gdzie Θ nazywamy jednostkowym kątem skręcenia.

$$\alpha(x_1) = \Theta x_1$$

Każdy przekrój poprzeczny podlega **deplanacji (spaczeniu)**, tj. przestaje być płaski i staje się pewną powierzchnią **zakrzywioną**. Zakładamy przy tym, że w każdym przekroju deplanacja ta opisana jest zależnością:

$$u_1(x_1; x_2; x_3) = \Theta \cdot \phi(x_2; x_3)$$

gdzie Θ jest **jednostkowym kątem skręcenia**, a funkcja ϕ , nazywana **funkcją deplanacji**, nie zależy od zmiennej x_1 .

Z uwagi na swobodę deplanacji przekroju przy skręcaniu tak postawione zagadnienia nazywa się zagadnieniem **skręcania swobodnego**.

Przemieszczenia na kierunkach osi x_2 i x_3 wyznaczamy jako wektor łączący **położenie początkowe i końcowe**:

$$u_2 = r [\cos(\beta + \alpha) - \cos \beta] = r [\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos \beta]$$

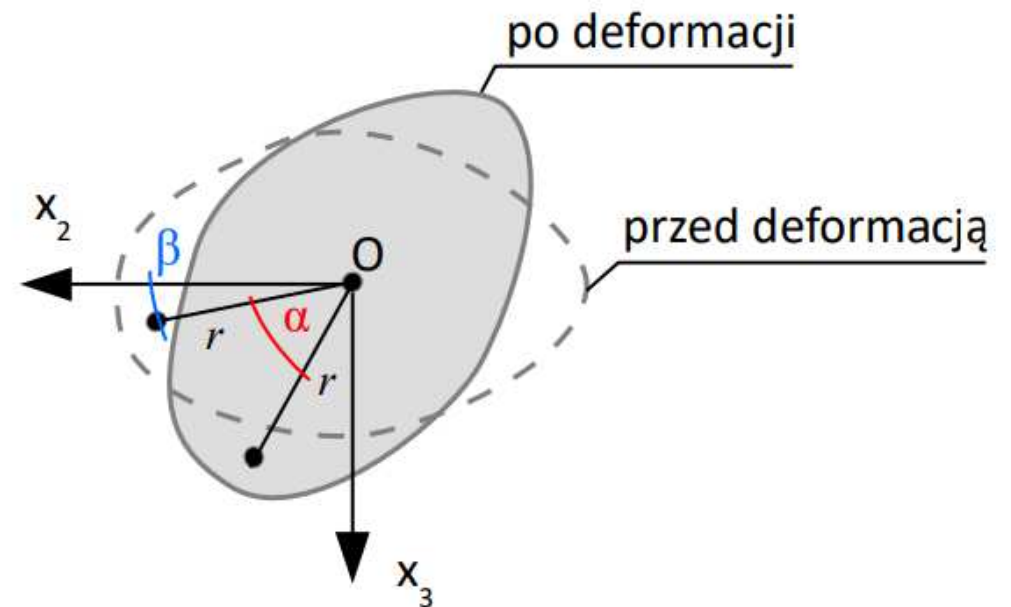
$$u_3 = r [\sin(\beta + \alpha) - \sin \beta] = r [\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha - \sin \beta]$$

Na mocy założenia o **małych przemieszczeniach i odkształceniach**, możemy zastosować następujące przybliżenia:

$$\begin{cases} \cos \alpha \approx 1 \\ \sin \alpha \approx \alpha \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} u_2 \approx -r \alpha \sin \beta & = -\alpha x_3 \\ u_3 \approx r \alpha \cos \beta & = \alpha x_2 \end{cases}$$



Uwzględniając założenie o **liniowej zmianie kąta obrotu** przekroju, otrzymujemy wektor przemieszczenia w następującej postaci:

$$\begin{cases} u_1 = \Theta \phi(x_2; x_3) \\ u_2 = -\Theta x_1 x_3 \\ u_3 = \Theta x_1 x_2 \end{cases}$$

Na podstawie **związków kinematycznych** wyznaczamy **tensor odkształcenia** (jako odpowiednie **pochodne** założonego pola przemieszczeń zatem tożsamościowo spełniają **warunki nierozdzielności**):

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_{11} = 0 & \varepsilon_{22} = 0 & \varepsilon_{33} = 0 \\ \varepsilon_{23} = 0 & \varepsilon_{31} = \frac{\Theta}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_3} + x_2 \right) & \varepsilon_{12} = \frac{\Theta}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} - x_3 \right) \end{array}$$

Wykorzystując **związki konstytutywne** materiału Hooke'a wyznaczamy na ich podstawie **tensor naprężenia**:

$$\begin{array}{lll} \sigma_{11} = 0 & \sigma_{22} = 0 & \sigma_{33} = 0 \\ \sigma_{23} = 0 & \sigma_{31} = \Theta G \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_3} + x_2 \right) & \sigma_{12} = \Theta G \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} - x_3 \right) \end{array}$$

Równanie nierozdzielności odkształceń służące obliczaniu funkcji naprężeń (obliczaniu funkcji F jeśli jest znany jednostkowy kąt obrotu θ lub odwrotnie, znając wartość funkcji F możemy obliczyć kąt θ), gdzie G -z moduł Kirchhoffa.

$$\nabla^2 F = -2G\theta$$

Znając funkcję naprężeń F(θ) możemy obliczyć wartość **momentu skręcającego** M_s jako funkcję jednostkowego kąta skręcenia θ .

$$M_s = 2 \int (A) F dF$$

Skręcanie pręta pryzmatycznego o przekroju eliptycznym

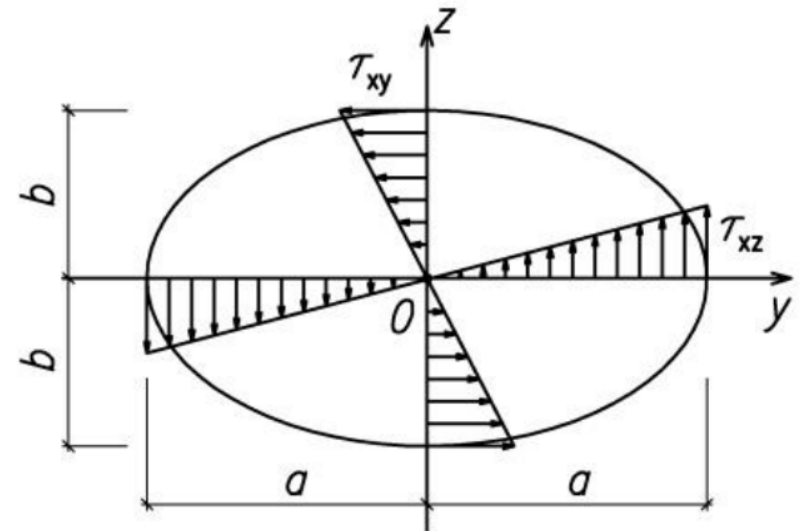
- osie y, z przyjmujemy jako **główne, centralne** osie bezwładności przekroju
- rozkłady **naprężeń stycznych** wzdłuż tych osi

Równanie **konturu przekroju** poprzecznego:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0 ,$$

Moment skręcający:

$$M_s = 2D \int_{(A)} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) dA = -D \pi a b = G I_s \theta .$$



Naprężenia styczne wynoszą:

$$\tau_{xy} \equiv \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{2M_s}{\pi a b^3} y, \quad \tau_{xz} \equiv -\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2M_s}{\pi a b^3} z,$$
$$\tau_{\max} = |\tau_{xz}|_{\max} = \frac{|M_s|}{W_s},$$

Moment bezwładności I_s i wskaźnik wytrzymałości W_s na skręcanie dla przekroju eliptycznego:

$$I_s = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}, \quad W_s = \frac{\pi a b^2}{2}.$$

Przemieszczenia u i v określają wzory wyrażone za pomocą kąta skręcenia jednostkowego θ

$$u = -\frac{M}{E I_s} y z \quad v = \frac{M}{E I_s} x y \quad \theta = \frac{M}{E I_s}$$

Skręcanie pręta pryzmatycznego o przekroju kołowym

- przypadek pręta eliptycznego, w którym **półośce elipsy są równe** sobie, tj. **$a = b = R$**
- moment bezwładności przekroju na skręcanie I_s jest równy momentowi biegunowemu I_0 , z którego wynika wskaźnik wytrzymałości na skręcanie

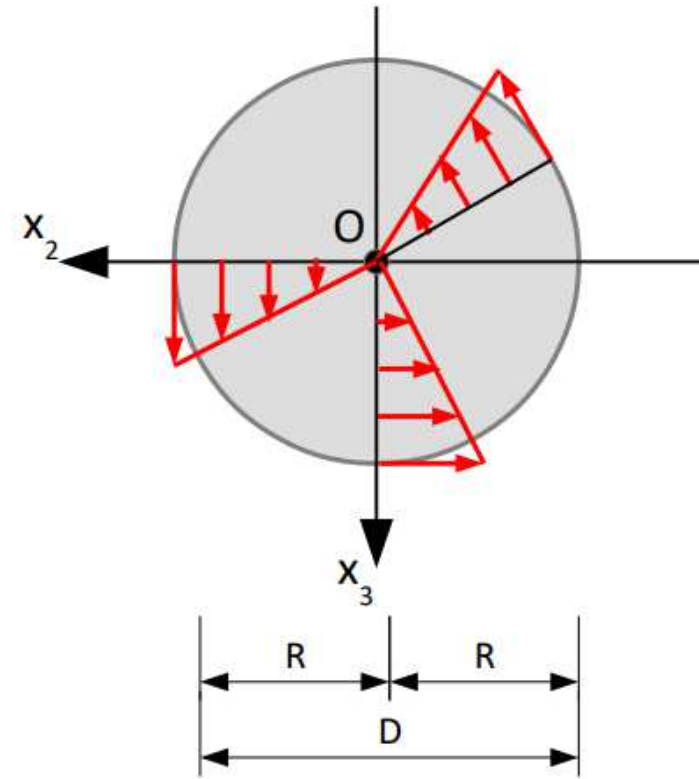
$$I_s \equiv I_0 = \int_{(A)} (y^2 + z^2) dA = \frac{\pi R^4}{2}, \quad W_s = \frac{\pi R^3}{2}$$

- przekrój poprzeczny **nie ulega spaczeniu**

$$u(y, z; x) \equiv 0$$

- Obowiązują wzory na naprężenia jak w przekroju eliptycznym

$$\tau_{xy} = -\frac{M}{I_s} y, \quad \tau_{xz} = \frac{M}{I_s} z, \quad \tau_{\max} = \max |\tau_{xz}| = \frac{M}{W_s}$$



Skręcanie pręta pryzmatycznego o przekroju prostokątnym

- W przypadku pręta prostokątnego przyjmuje się **funkcję naprężeń w postaci szeregu trygonometrycznego**, gdzie oś y odmierza się od lewego boku przekroju poprzecznego

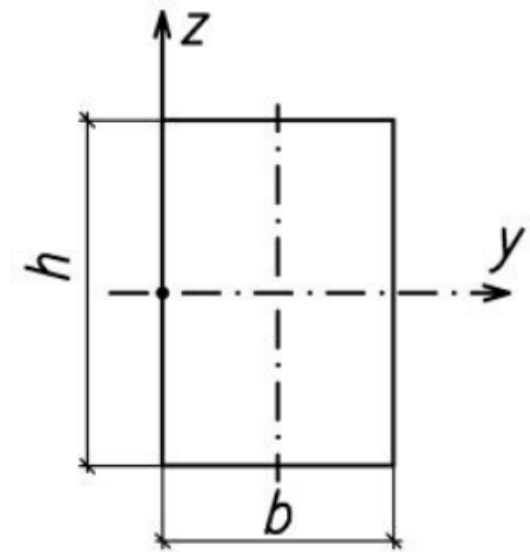
$$F(y, z) = \sum_{j=1,3,5,\dots} Z_j(z) \sin \frac{j\pi y}{b}$$

- Odkształcenia** są dość złożone, a końcowy wynik otrzymuje się za pomocą **szeregu**

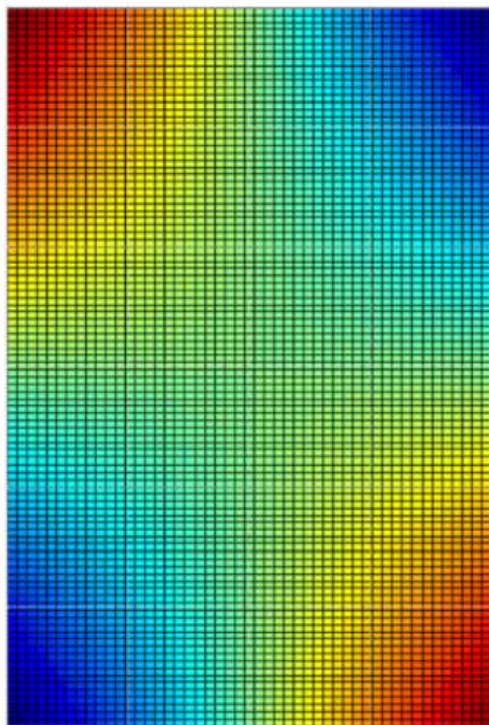
$$M_s = \frac{Gb^3h}{3} \left[1 - \frac{192b}{\pi h} \sum_{j=1,3,5,\dots} \text{th} \left(\frac{j\pi h}{2b} / j^5 \right) \right]$$

- gdzie występuje **tangens hiperboliczny**

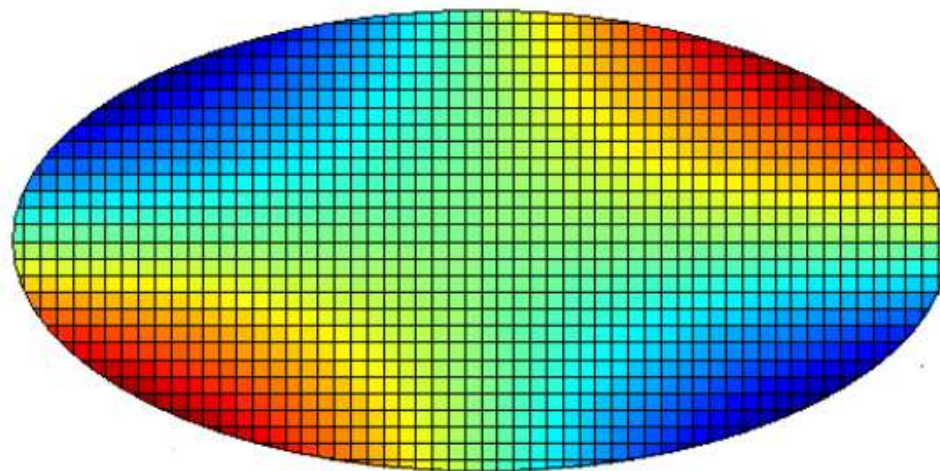
$$\text{th } a = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}$$



Porównanie funkcji deplanacji:



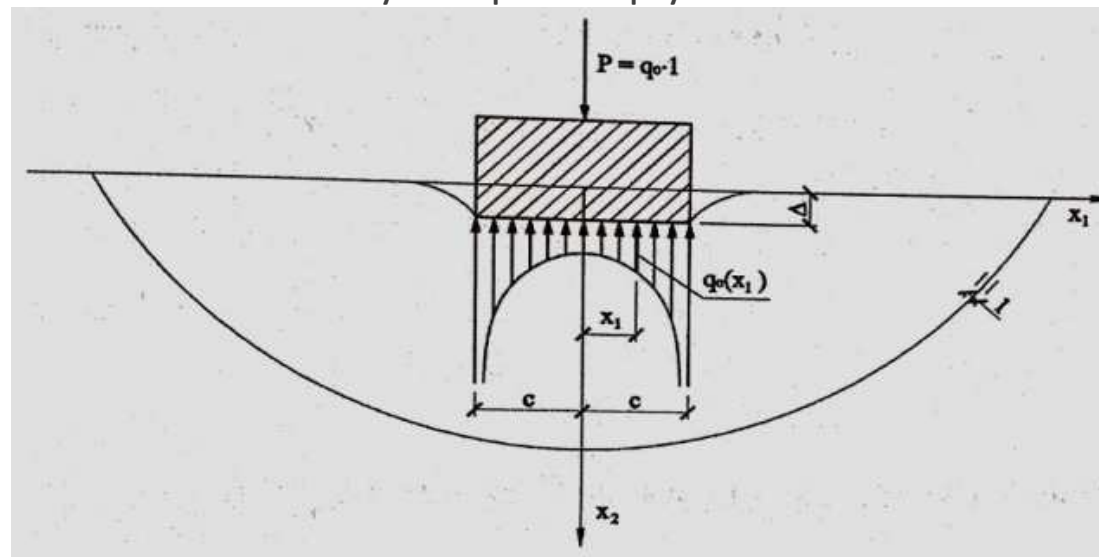
Przekrój prostokątny



Przekrój eliptyczny

Zagadnienie sztywnego stempla wciskanego w podłoże gruntowe

Rozważamy wyznaczenie rozkładu naprężeń, odkształceń i przemieszczeń w punktach sprężystego podłoża gruntowego obciążonego siłami przekazanymi pośrednio przez długie sztywne pasmo płytowe



Płaski stan przemieszczenia

Nieznany rozkład nacisków $q(x_1)$ pod stemplem jest symetryczny ze względu na symetrię pasma i obciążenia

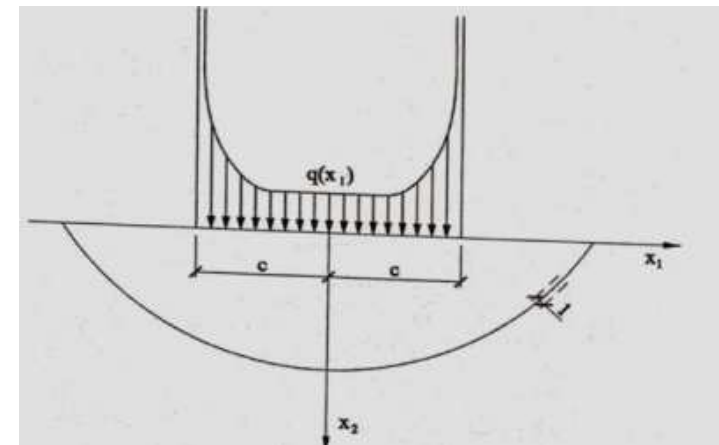
$$P = q_0 \cdot 1 = \int_{-c}^c q(x_1) dx_1$$

W analizowanym problemie występują mieszane **warunki brzegowe**, a mianowicie:

$$\begin{aligned} \text{dla } |x_1| \leq c & \begin{cases} \sigma_{22}|_{x_2=0} = -q(x_1) \\ \sigma_{23}|_{x_2=0} = 0 \\ u_1|_{x_2=0} = \Delta = \text{const} \end{cases} \\ \text{dla } |x_1| > c & \quad u_2|_{x_2=0} = 0 \end{aligned}$$

Prawo akcji i reakcji (III Zasada Newtona):

- brzeg x_2 obciążamy nieznanym ciśnieniem $q(x_1)$



Warunek przemieszczeniowy na podstawie poprzednich równań :

$$u_2|_{x_2=0} = \Delta = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E \cdot 1} \int_{\xi=-c}^{\xi=c} q(\xi) \ln \frac{|x_1 - \xi|}{a} d\xi$$

Prowadzi on do następującego równania:

$$\int_{\xi=-c}^{\xi=c} q(\xi) \ln|x_1 - \xi| d\xi = const$$

Jeżeli mamy wyznaczone obciążenie brzegu możemy teraz, korzystając z poprzednich zależności i **funkcji wpływu Greena**, wyznaczyć naprężenia, odkształcenia i **przemieszczenia w punktach podłoża gruntowego**

Rozwiązanie powyższego równania przez Carlemann'a :

$$q(x_1) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x_1^2}} \int_{\xi=-c}^{\xi=c} q(\xi) d\xi = \frac{P}{\pi\sqrt{c^2 - x_1^2}}$$