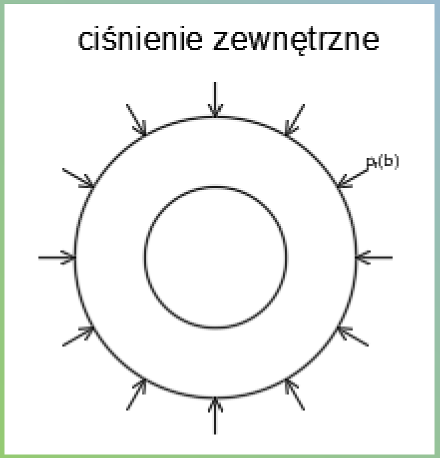
Stan kołowo symetryczny(SKS).
Rury grubościenne.

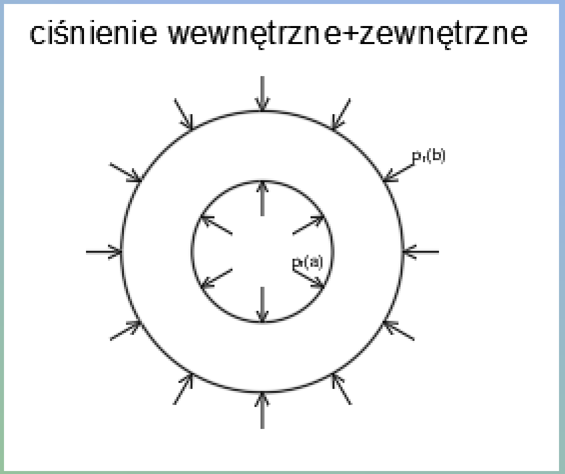
SKS

- Szczególnym przypadkiem PSN w układzie biegunowym jest „stan kołowo symetryczny”.
- Stan ten charakteryzuje się niezależnością zmiennych zależnych od kąta Θ.

SKS

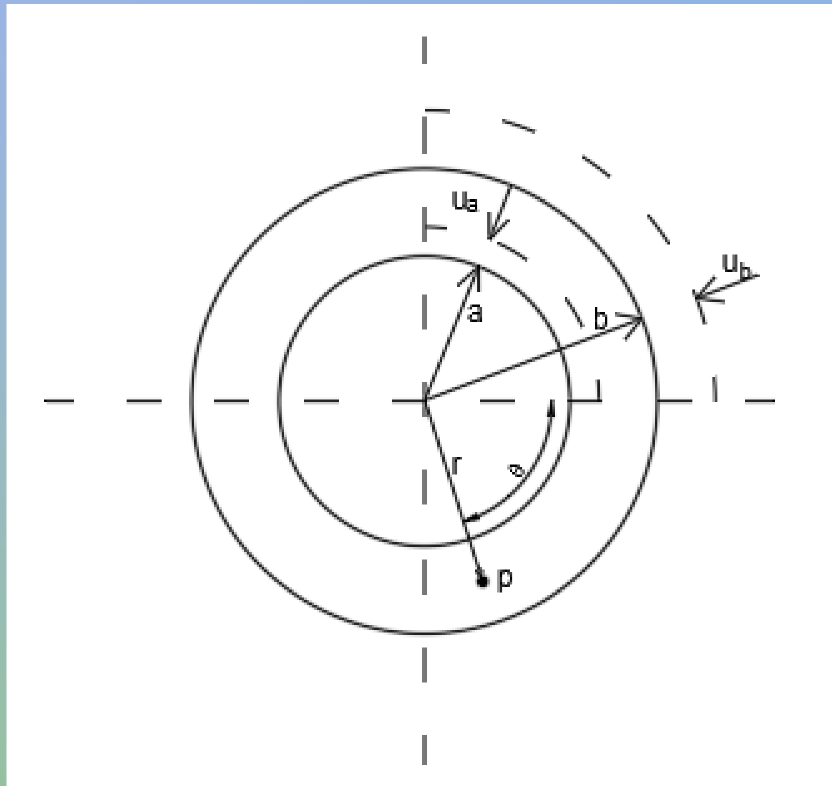
- Stan taki może mieć miejsce w przypadku, tarczy pierścieniowej poddanej obciążeniu radialnemu $p_a = p_r(a)$ (np. ciśnienie wewnętrzne/zewnętrzne)





SKS

- W takiej sytuacji tarcza taka może jedynie przemieszczać się w kierunku radialnym, oznacza to że przemieszczenia obwodowe $v(r) \equiv 0$, natomiast niezerowe przemieszczenia brzegów oznaczono przez $u(a)\ i\ u(b)$



SKS

- W przypadku SKS występują tylko przemieszczenia u odkształcenia radialne (ε_r) i obwodowe (ε_θ)oraz naprężenia radialne (σ_r) i obwodowe (σ_θ)

SKS

- Wymienione wcześniej zmienne u, ε_r i ε_θ , σ_r i σ_θ są funkcjami (pola) tylko zmiennej r dlatego równania różniczkowe są równaniami zwyczajnymi (zwykłe pochodne)

SKS

- W takim przypadku jest łącznie 5 niezależnych równań i 5 niezależnych niewiadomych
- 1 równanie równowagi
- 2 równania geometryczne
- 2 równania fizyczne

SKS I. Równanie równowagi

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{r} + R = 0$$

R-Składowa siła masowa działająca wzdłuż promienia

SKS II. Równania geometryczne

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{v}{1-v}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)$$

v- liczba Poissona

SKS III. Równania Fizyczne

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - v^2}(\varepsilon_r + v\varepsilon_\theta)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - v^2}(\varepsilon_\theta + v\varepsilon_r)$$

- E- Moduł Young’a

SKS Równania przemieszczeniowe

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du}{dr} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} \\ \varepsilon_z &= -\frac{v}{1-v}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \end{aligned} \quad \underset{(+)}{\rightarrow} \quad \begin{aligned} &\rightarrow \sigma_r = \frac{E}{1-v^2}(\varepsilon_r + v\varepsilon_\theta) \rightarrow \\ &\rightarrow \sigma_\theta = \frac{E}{1-v^2}(\varepsilon_\theta + v\varepsilon_r) \rightarrow \end{aligned} \quad \underset{(+)}{\rightarrow} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{r} + R = 0$$

$$\downarrow\downarrow$$

Otrzymano „przemieszczeniowe równanie równowagi”:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} * \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + R = 0$$

SKS Równania przemieszczeniowe

- Warunki brzegowe

a) w.b. przemieszczeniowy

$$u(c) = u_c$$

b) w.b. naprężeniowy

$$\sigma_r(c) = \frac{E}{1 - v^2} * \left(\frac{du}{dr} + v * \frac{u}{r} \right) r = p_c$$

Dla każdego brzegu r=c gdzie c= a, b

Równania dla funkcji naprężeń

- Pominięcie siły masowej R daje równanie biharmoniczne dla równania nierozdzielności

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right)\equiv\left(\frac{d^4F}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d^3F}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{\frac{1}{r}dF}{dr}\right)=0$$

- Natomiast funkcja F jest całką równania geometrycznego o postaci

$$F=A*\ln r+Br^2\ln r+Cr^2+D$$

Naprężenia

- Radialne

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2\ln r) + 2C$$

- Obwodowe

$$\sigma_\theta = \frac{d^2F}{dr^2} = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{r}^2} + \mathrm{B}(3 + 2\ln \mathrm{r}) + 2\mathrm{C}$$

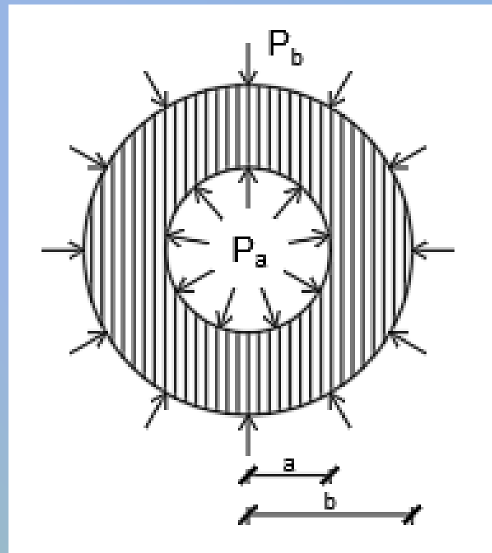
Naprężania rura grubościenna

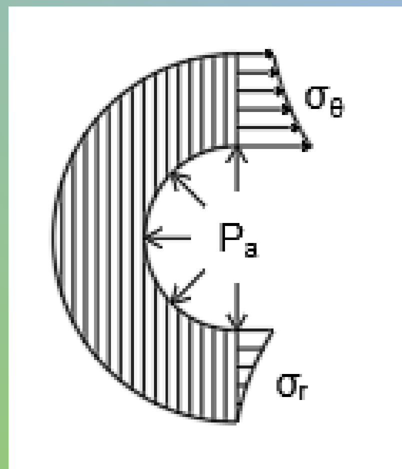
- Dla B=0
- Radialne

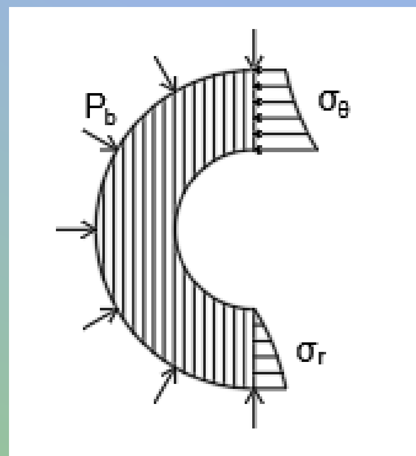
$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C$$

- Obwodowe

$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C$$







Stałe A i C

- Dla $\sigma_r(a) = -p_a$ i $\sigma_r(b) = -p_b$

$$A = -\frac{a^2 b^2 * (p_a - p_b)}{b^2 - a^2}$$

$$2C = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}$$

Wzory na naprężenia

$$\sigma_r = -\frac{a^2 b^2 * (p_a - p_b)}{b^2 - a^2} \frac{1}{\mathrm{r}} + \frac{p_a a^2 - p_b b\hat{}2}{b^2 - a^2}$$

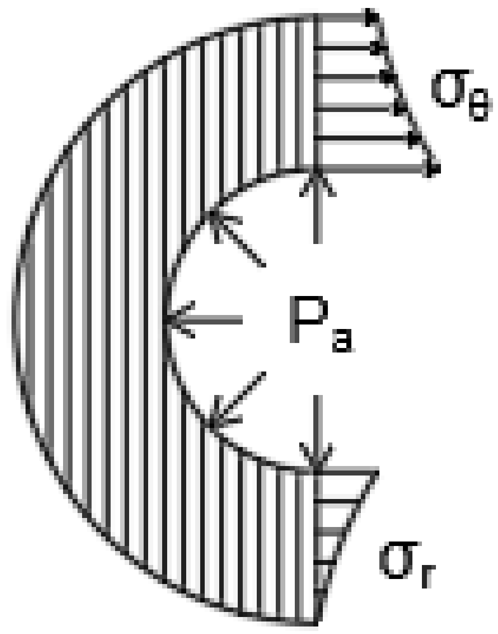
$$\sigma_\theta = \frac{a^2 b^2 * (p_a - p_b)}{b^2 - a^2} \frac{1}{\mathrm{r}} + \frac{p_a a^2 - p_b b\hat{}2}{b^2 - a^2}$$

Przypadki szczególne

- Ciśnienie wewnętrzne

$$\sigma_r = \frac{a^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)p_a$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)p_a$$



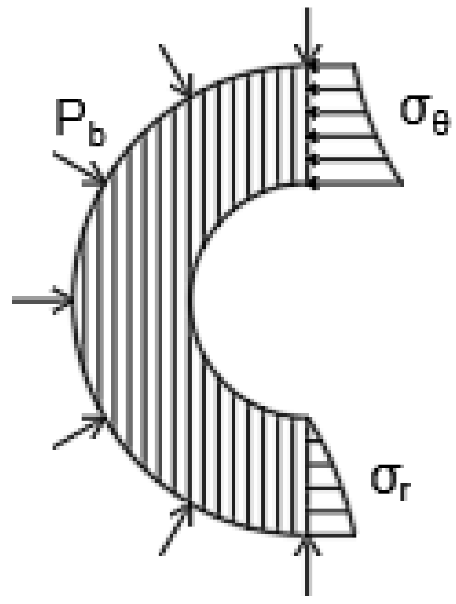
Rozkład naprężeń σ_θ i σ_r
dla ciśnienia wewnętrznego p_a

Przypadki szczególne

- Ciśnienie zewnętrzne

$$\sigma_r = -\frac{b^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)p_b$$

$$\sigma_\theta = -\frac{b^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)p_b$$



Rozkład naprężeń σ_θ i σ_r
dla ciśnienia zewnętrznego p_b

Rozwiązanie równania przemieszczeniowego

- Siła masowa R=0

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{rdr}-\frac{u}{r^2}=0$$

Całką tego równania jest funkcja:

$$u=B_1r+\frac{B_2}{r}$$

Rozwiązanie równania przemieszczeniowego

- Podstawienia do wzorów fizycznych:

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - v^2}\left[\left(B_1 - \frac{B_2}{r^2}\right) + v\left(B_1 + \frac{B_2}{r^2}\right)\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - v^2}\left[\left(B_1 + \frac{B_2}{r^2}\right) + v\left(B_1 - \frac{B_2}{r^2}\right)\right]$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

Stałe B_1, B_2

- Na podstawie warunków brzegowych możemy obliczyć:

$$B_1 = \frac{1 - v}{E} * \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}$$

$$B_2 = \frac{1 + v}{E} * \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2}$$

Pole przemieszczenia dla u(r) PSN

$$\mathrm{u} = \frac{1}{(b^2 - a^2)E}\left[(1 - v)(a^2 p_a - b^2 p_b)r + (1 + v)\frac{a^2 b^2}{r}(p_a - p_b)\right]$$

Odkształcenie towarzyszące zmianie grubości tarczy w PSN opisuje wzór:

$$\varepsilon_z = -\frac{2v}{E} * \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} = const.$$

Naprężenia i odkształcenia rury grubościennej PSO

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[B_1 - (1-2v)\frac{B_2}{r^2}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(2+v)(1-2v)}\left[B_1 + (1-2v)\frac{B_2}{r^2}\right]$$

Stałe B_1, B_2 PSO

$$B_1 = \frac{1+v}{E}\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}(p_a - p_b)$$

$$B_2 = (1+v)(1-2v)\frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}$$

Funkcja przemieszczenia u(r)

$$u(r) = \frac{1+v}{(b^2 - a^2)E}\left[a^2 b^2 (p_a - p_b) r + (1 + 2v)\frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{r^2}\right]$$

W rurze grubościennej w stanie PSO pojawiają się naprężenia

$$\sigma_z = v(\sigma_r + \sigma_\theta) = 2v\,\frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}$$

Przykład obliczeniowy

Obliczyć naprężenia rury swobodnej obciążonej ciśnieniem

- Wewnętrznym
- Zewnętrznym
- Wewnętrznym i zewnętrznym

- a=45mm, b=80mm, p_a=100 MPa p_b=100 MPa

Założenia

- dysponując pięcioma równaniami; 1 równowagi statycznej, 2 równania fizyczne i 2 równania geometryczne:
- tworzymy układ równań:
- $\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{r} + R = 0,$
- $\varepsilon_r = \frac{du}{dr},$
- $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r},$
- $\sigma_r = \frac{E}{1-v^2}(\varepsilon_r + v\varepsilon_\theta),$
- $\sigma_\theta = \frac{E}{1-v^2}(\varepsilon_\theta + v\varepsilon_r),$

Początek

- Po podstawieniach otrzymujemy przemieszczeniowe równanie równowagi
- $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} * \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + R = 0,$
- Pominięcie siły masowej R, prze całkowanie oraz przyjęcie za B=0, sprowadza nam to równanie do postaci :
- $\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C,$
- $\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C,$

Cieśninie wewnętrzne

- Stałe A i C obliczamy z warunków brzegowych, gdzie:
- $\sigma_r(a) = -p_a,$
- $\sigma_r(b) = 0,$
- $A = -\frac{a^2 b^2 * (p_a - p_b)}{b^2 - a^2} = -\frac{45^2 * 80^2 * 100}{80^2 - 45^2} = -296230\ N,$
- $2C = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} = \frac{100 * 45^2}{80^2 - 45^2} = 46{,}28\,\frac{N}{mm^2},$

Ciśnienie wewnętrzne II

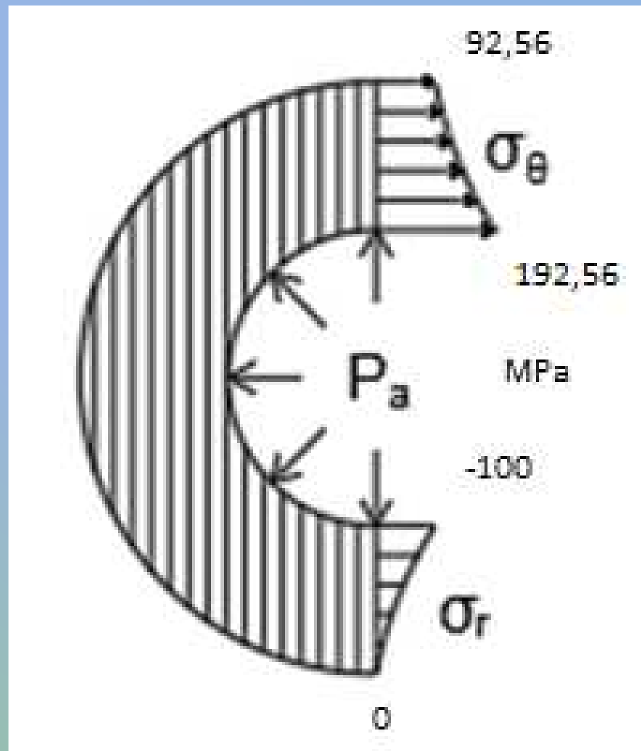
- Podstawiając do wzorów na naprężenia :

Dla r=80 , punkty leżące na zewnętrznej krawędzi

- $\sigma_r = \frac{-296230}{80^2} + 46{,}28 = 0$
- $\sigma_\theta = -\frac{-296230}{80^2} + 46{,}28 = 92{,}56\ MPa$

Dla r=45, punkty leżące na wewnętrznej krawędzi

- $\sigma_r = \frac{-296230}{45^2} + 46{,}28 = -100\ MPa$
- $\sigma_\theta = -\frac{-296230}{45^2} + 46{,}28 = 192{,}56\ MPa$



Cieśninie zewnętrzne

- Stałe A i C obliczamy z warunków brzegowych, gdzie:
- $\sigma_r(a) = 0,$
- $\sigma_r(b) = -p_b,$
- $A = -\frac{a^2 b^2 * (p_a - p_b)}{b^2 - a^2} = -\frac{45^2 * 80^2 * (-100)}{80^2 - 45^2} = 296230\ N,$
- $2C = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} = \frac{-100 * 80^2}{80^2 - 45^2} = -146{,}28 \frac{N}{mm^2},$

Cieśninie zewnętrzne II

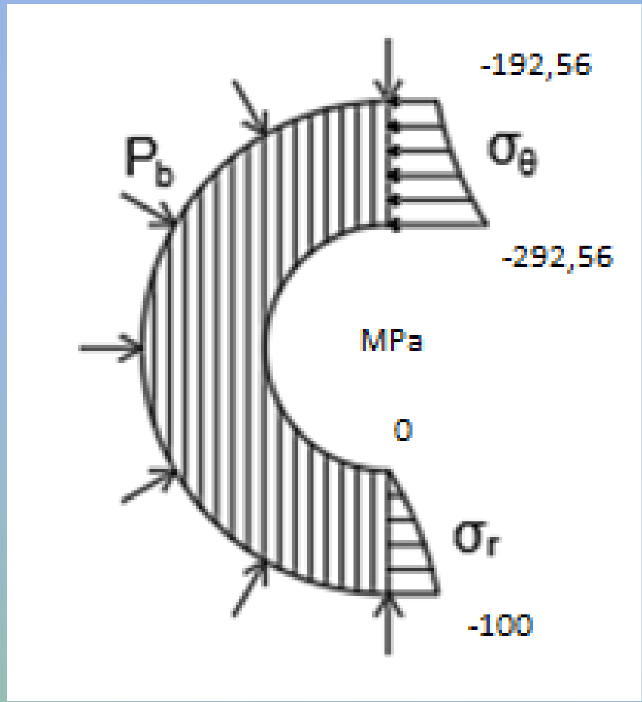
- Podstawiając do wzorów na naprężenia :

Dla r=80 , punkty leżące na zewnętrznej krawędzi

- $\sigma_r = \frac{296230}{80^2} - 146{,}28 = -100\ MPa$
- $\sigma_\theta = -\frac{296230}{80^2} - 146{,}28 = -\ 192{,}56\ MPa$

Dla r=45, punkty leżące na wewnętrznej krawędzi

- $\sigma_r = \frac{296230}{45^2} - 146{,}28 = 0\ MPa$
- $\sigma_\theta = -\frac{296230}{45^2} - 146{,}28 = -\ 292{,}56\ MPa$



Cieśninie wewnętrzne i zewnętrzne

- Stałe A i C obliczamy z warunków brzegowych, gdzie:
- $\sigma_r(a) = -p_a,$
- $\sigma_r(b) = -p_b,$
- $A = -\frac{a^2 b^2 * (p_a - p_b)}{b^2 - a^2} = -\frac{45^2 * 80^2 * (100 - 100)}{80^2 - 45^2} = 0N,$
- $2C = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} = \frac{100 * 45^2 - 100 * 80^2}{80^2 - 45^2} = -100 \frac{N}{mm^2},$

Cieśninie wewnętrzne i zewnętrzne II

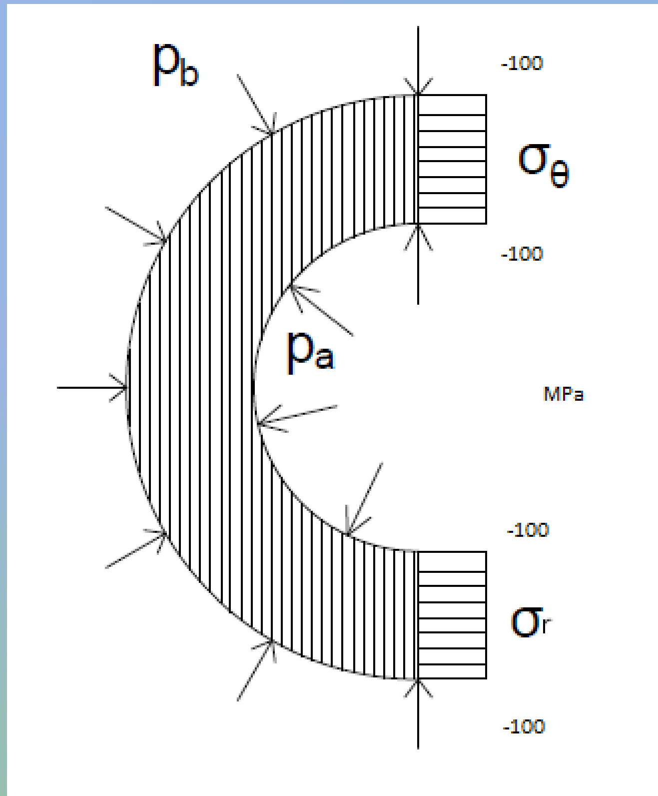
- Podstawiając do wzorów na naprężenia :

Dla r=80 , punkty leżące na zewnętrznej krawędzi

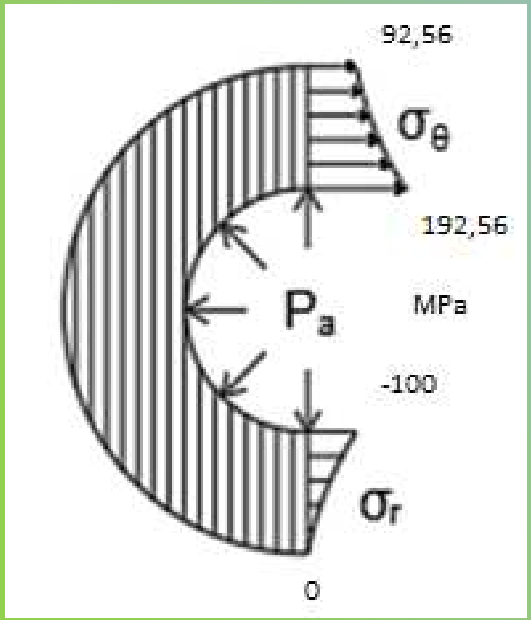
- $\sigma_r = \frac{0}{80^2} - 100 = -100$
- $\sigma_\theta = -\frac{296230}{80^2} - 100 = -100\ MPa$

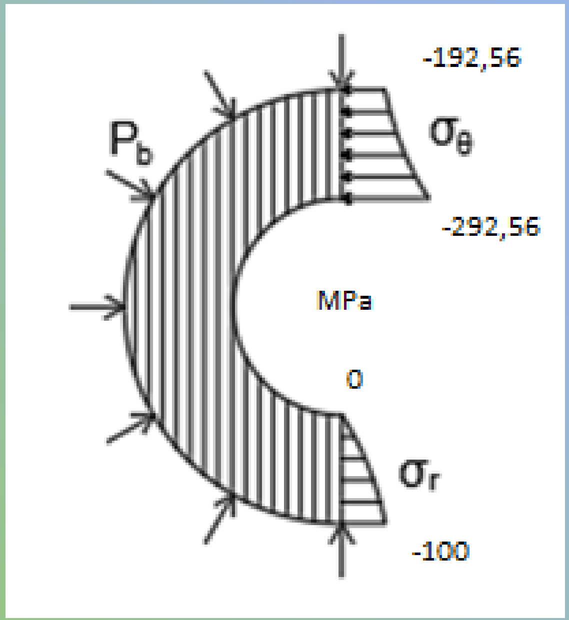
Dla r=45, punkty leżące na wewnętrznej krawędzi

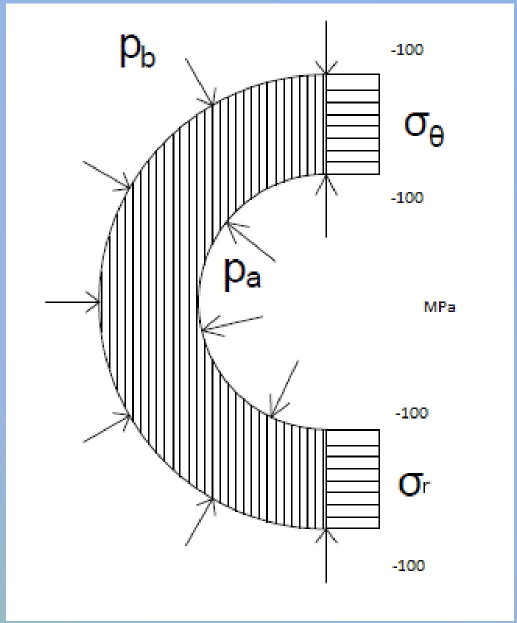
- $\sigma_r = \frac{0}{45^2} - 100 = -100\ MPa$
- $\sigma_\theta = -\frac{0}{45^2} - 100 = -100MPa$



Porównanie


92,56
σθ
192,56
Pa
MPa
-100
σr
0


-192,56
Pb
σθ
-292,56
MPa
0
σr
-100


pb
-100
σθ
-100
pa
MPa
-100
σr
-100