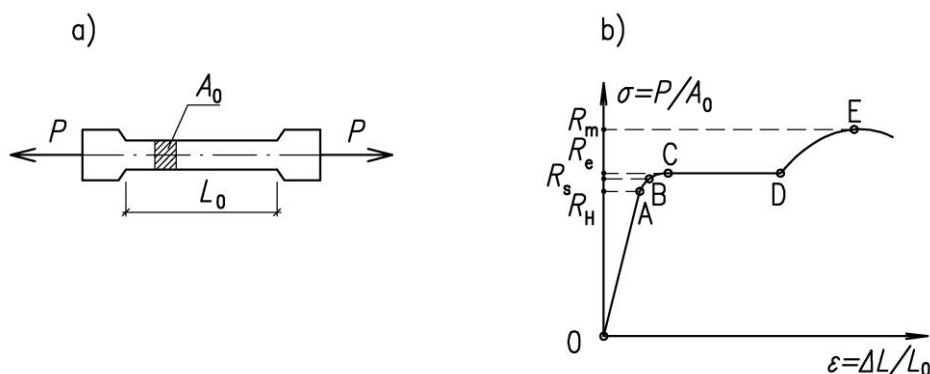


9. Podstawy teorii plastyczności (TP)

9.1. Wprowadzenie

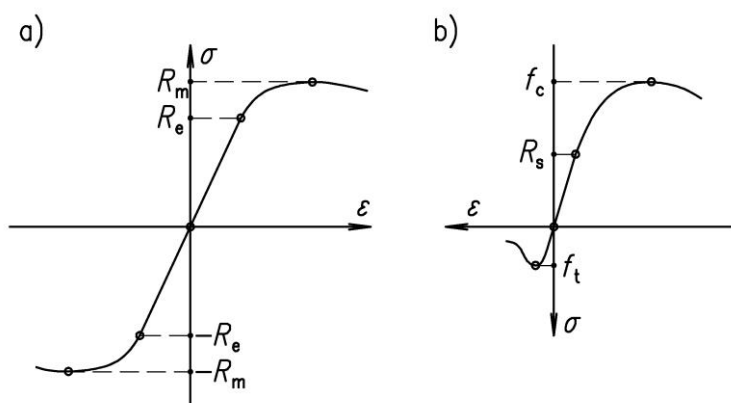
Podstawowym doświadczeniem jest rozciąganie laboratoryjnych próbek metalowych, Rys. 9.1a. Wykres zależności stanu jednoosiowego $\sigma(\varepsilon)$ dla stali miękkiej pokazano na Rys. 1b. Na wykresie zaznaczono wartości naprężeń R_H , R_s , R_e , R_m , odpowiadające punktom A, B, C, D, F na wykresie rozciągania $\sigma - \varepsilon$. Te punkty ograniczają zakresy obowiązywania odpowiednio: prawa Hooke'a, nieliniowej sprężystości, płynięcia plastycznego, początkowi wzmocnienia i osiągnięcia wytrzymałości materiału.



Rys. 9.1: a) Próba laboratoryjna badania materiału na rozciąganie, b) Wykres naprężenie-odkształcenia $\sigma - \varepsilon$

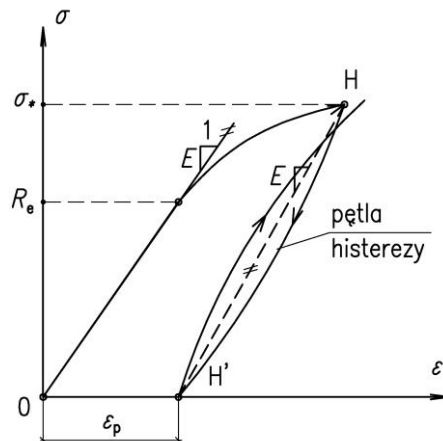
Wiadomo z WM obserwowany wykres $\sigma - \varepsilon$ opisuje przebieg złożonych procesów na poziomie mikrostruktury materiału, w szczególności uruchomienie mechanizmów niszczenia ciągłości struktury wewnętrznej mikroskładników i dysypacji energii wewnętrznej.

Przytoczono wykres $\sigma - \varepsilon$ dla stali miękkiej z wyraźną granicą plastyczności R_e . Wiele materiałów (w tym stal twarda, stopy aluminium) nie mają wyraźnej lecz umowną granicę plastyczności, por. Rys. 9.2a. Stopy metali wykazują ponadto podobne właściwości na ściskanie i rozciąganie, co je różni od materiałów wrażliwych na znak naprężeń. Dla przykładu, na Rys. 9.2b pokazano wykres jednoosiowego ściskania/rozciągania dla betonu, który ma nośność wielokrotnie wyższą na ściskanie f_c niż na rozciąganie f_t .



Rys. 9.2. Charakterystyki materiałów: a) Symetryczna zależność $\sigma - \varepsilon$ na rozciąganie/ściskanie, b) Wrażliwość na znak naprężenia σ

Inną istotną cechą uplastycznionego materiału jest wrażliwość naprężenia σ na zmianę kierunku przykładanych obciążeń. Na Rys. 9.3 pokazano wykres $\sigma - \varepsilon$ dla zmiennych kierunków obciążenia, tzn. po przekroczeniu granicy plastyczności R_e i osiągnięciu wartości naprężenia σ_* następuje lokalne odciążenie wzdłuż ścieżki $\sigma_* - \varepsilon_p$, innej niż dla wcześniej realizowanego obciążenia. Po „zdjęciu” obciążenia, tj. osiągnięcia punktu H' pozostaje *trwale odkształcenie*, które nazywa się *odkształceniem plastycznym* ε_p .



Rys. 9.3. Lokalne odciążenie i obciążenie

Powtórne obciążenie będzie wywoływało ścieżkę $\sigma - \varepsilon$ wzdłuż *pętli histerezy*, która obejmuje obszar proporcjonalny do dysypowanej energii wewnętrznej. W przybliżeniu ścieżka odciążenia jest równoległa do stycznej w punkcie początkowym 0 i kącie nachylenia $\arctg E$, gdzie E jest modułem sprężystości w prawie Hooke’a.

Doświadczalne charakterystyki materiału $\sigma - \varepsilon$ otrzymuje się dla jednoosiowego stanu naprężenia (rozciągania/ściskania) materiału. Realizuje się też inne doświadczenia laboratoryjne, np. prostego ścinania. Znacznie bardziej skomplikowane są realizacje stanów złożonych, rozpoczynając od stanów dwu i, docelowo, trzyosiowych. Badania doświadczalne ulegają dalszym komplikacjom jeśli obciążenia są cykliczne, gdy wielokrotnie są realizowane stany obciążeń/odciążień. Otrzymywane wyniki doświadczeń stanowią podstawę do sformułowania różnych, na ogół dalece uproszczonych *modeli materiałów*, które stosuje się zamiast liniowych równań fizycznych materiału (modelu) Hooke’a

9.2. Jednoosiowy stan naprężenia w TP

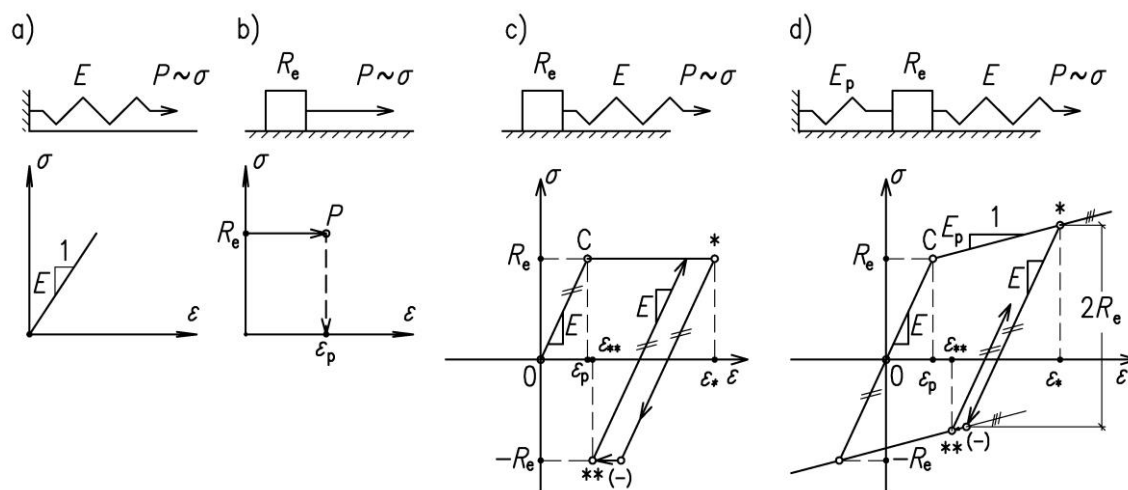
Jednoosiowego stanu naprężenia jest rozpatrywany obszernie w wytrzymałości materiałów i mechanice konstrukcji, w odniesieniu do analizy idealnie sprężystych kratownic i zginania belek oraz ram płaskich. Celem wykładu jest zwrócenie uwagi na problemy, jakie zjawiają się przy uwzględnieniu plastycznych właściwości materiału.

9.2.1. Przyjęte założenia i modele materiału

1. Przyjęto jedynie proste modele materiału o *symetrycznych właściwościach* na ściskanie/rozciąganie.

2. Uwagę skupiono na *modelu biliniowym* dla jednoosiowego rozciągania, zwłaszcza na *idealnym modelu materiału sztywno-plastycznego* lub *sprężysto-plastycznego*, Rys. 9.4b,c.

3. Oprócz skupienia uwagi na materiale bez wzmocnienia (ograniczamy się do części O - C-D wykresu $\sigma - \varepsilon$ na Rys. 9.1b) pomija się też wpływy reologiczne (prędkości naprężeń i odkształceń) jak też dynamiczne (przyspieszenia). Tak więc przyjmuje się, że próby rozciągania są wykonywane w dość długim czasie jako badania statyczne. Pomijamy też sprężenia termo-mechaniczne.



Rys.9.4: Modele materiałów i ich mechaniczne analogi:
a) Materiał liniowo sprężysty, b) Materiał sztywno plastyczny, c) Materiał idealnie sprężysto-plastyczny, d) Materiał sprężysto-plastyczny z liniowym wzmocnieniem

Przyjęte założenia umożliwiają budowanie modeli materiałów dla stali miękkiej i w ograniczonym stopniu mogą być przydatne do analizy stanów granicznych tych konstrukcji, w których dominuje jednoosiowy stan naprężenia. Oprócz zależności $\sigma - \varepsilon$, na Rys. 9.4 pokazano też symulację mechaniczną tych zależności za pomocą sprężyn i suwaka z suchym tarciem. Sprężyny modelują liniowe zależności $\sigma(\varepsilon)$ a suwak umożliwi opis nieciągłości pochodnych tych zależności, związanych z przechodzeniem od zakresu sprężystego do sprężysto-plastycznego jak też początek *lokalnych odciążenia* i realizowanie *pętli histerezy*.

Na Rys. 9.4 pokazano proste modele materiałów, oparte na odcinkowo liniowej aproksymacji charakterystyki jednoosiowego rozciągania. Wychodzi się od najprostszego *materiału idealnie sprężystego*, który fizycznie można modelować sprężyną o sztywności E , Rys. 9.4a. Jeśli zamiast sprężyny wprowadzi się suchy suwak o wartości siły tarcia $T \sim R_e$ to otrzymuje się model *materiału sztywno-plastycznego*, Rys. 9.4b. Połączenie sprężyny z suwakiem prowadzi do materiału idealnie sprężysto-plastycznego, Rys. 9.4c. Dodanie dodatkowej sprężyny o sztywności E_p daje model *materiału sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem*, Rys. 9.4d.

Najczęściej stosuje się modele pokazane na Rysunkach 9.4b i c. Model materiału sztywno plastycznego otrzymuje się jako przypadek graniczny materiału idealnie sprężysto-plastycznego przyjmując sztywność $E \rightarrow \infty$. W takim modelu nie występują odkształcenia sprężyste a odkształcenia plastyczne ε_p mają wartość zmienną, zależną od wartości odkształcenia, dla której rozpoczyna się proces plastycznie bierny, tj. lokalne odciążenia/obciążenia (punkt p na krzywej rozciągania, pokazany na Rys. 9.4b).

Ogólniejsze właściwości ma model idealnie sprężysto-plastyczny. Podstawową właściwością tego modelu jest możliwość nieograniczonego wzrostu odkształceń (płynięcie materiału) dla odkształceń $|\varepsilon| > \varepsilon_p$. Na Rys. 9.4c pokazano też możliwość sterowania odkształceniem i dla ε_* realizowanie *odciążenia*

aż do wartości naprężenia $\sigma = -R_e$. W punkcie (-) może pojawić się wtórne płynięcie aż do punktu **, w którym jest realizowane wtórne obciążenie określające pętlę histerezy.

Uogólnieniem modelu idealnie sprężysto-plastycznego jest model ze wzmocnieniem liniowym, jaki daje dodatkowa sprężyna o sztywności E_p , Rys. 9.4d. Ta sprężyna eliminuje możliwość powstania nieograniczonego płynięcia. Można stosować sterowanie naprężeniowe i w przypadku lokalnego odciążenia rozpoczyna się wtórne uplastycznienie, zgodne z tzw. *efektem Bauschingera*, który określa wartość naprężenia $\sigma_{(-)} \approx \sigma_* - 2 R_e$

Opisane modele służą analizie stanu jednoosiowego. W przypadku wieloosiowych stanów naprężeń formułowanie modeli jest znacznie bardziej złożone. Nie można się wtedy posługiwać analogiami „sprężynowo-suwakowymi” lecz modelami opartymi na teorii ośrodka ciągłego z odkształceniami plastycznymi.

9.2.2. Nośność sprężysta i plastyczna prostego ustroju nośnego

Jako prosty ustrój nośny przyjęto układ trzech nieważkich lin o polach przekroju $A = \text{const.}$, i o granicy plastyczności R_e , por. Rys. 9.5a. Pręt jest obciążony siłą P , przyłożoną do sztywnej poprzeczki. Założono model materiału idealnie sprężysto-plastycznego o granicy plastyczności R_e dla odkształcenia ε_p . Na Rys. 9.5a zaznaczono przemieszczenie u_L pod siłą P , któremu odpowiadają przemieszczenia u_i punktów $i = 1, 2, 3$ końców lin.

Rozpatrzone trzy obciążenia, dla których jest osiągnięta granica plastyczności w linach 1, 2, 3 (por. Rys.9.5 d-f). Odkształcenie na granicy plastyczności ε_p wynosi

$$\varepsilon_p = \frac{R_e}{E} \equiv \frac{u_p}{L} , \quad (9.1)$$

gdzie: E – moduł sprężystości, L – długość liny, por. Rys. 9.5a. Uplastycznienie prętów określa też wartość siły podłużnej

$$N_p = R_e A . \quad (9.2)$$

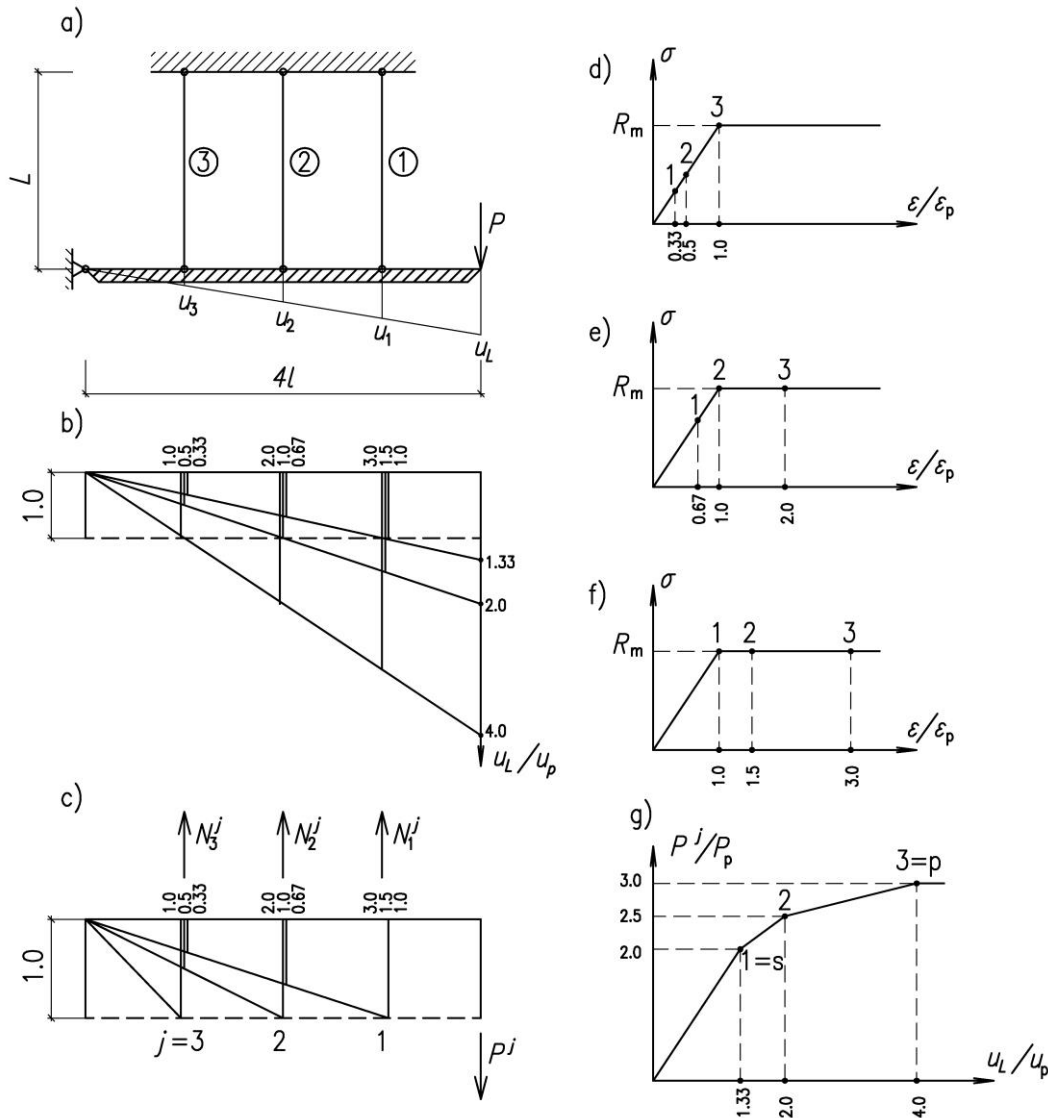
Obciążenie oblicza się z warunku równowagi $\sum_i = P$, zakładając, że reakcja w punkcie obrotu sztywnej poprzeczki jest równa zero. W ten sposób otrzymuje się wzór

$$P^j = \sum_{i=1}^3 N_i^j , \quad (9.3)$$

gdzie: P^j – wartość obciążenia dla uplastycznienia j -tej liny, N_i^j – siła podłużna w linii i -tej dla uplastycznienia liny j -tej.

Najpierw ulega uplastycznieniu pręt 1 i taki stan ① nazywa się stanem osiągnięcia *nośności sprężystej* P_s . Na Rys. 9.5d ten stan oznacza koniec zakresu sprężystego (powstaje pierwsze odkształcenie plastyczne ε_p w linii 1). Nośność sprężysta P_s analizowanego ustroju wynosi, por. Rys. 9.5c, g:

$$P_s \equiv P^1 = \sum_{i=1}^3 N_i^1 = N_1^1 + N_2^1 + N_3^1 = (1.0 + 0.67 + 0.33) N_p = 2.0 N_p . \quad (9.4.1)$$



Rys. 9.5: a) Schemat układu lin sprężysto-plastycznych ①, ②, ③, b) Przemieszczenia sztywnej poprzeczki dla stanów obciążeń 1, 2, 3, c) Wartości sił podłużnych w linach, d,e,f) Wartości naprężeń i odkształceń w linach, dla kolejnych stanów obciążeń, g) Ścieżka równowagi $P^j/P_p - u_L/u_p$

Obciążeniu $P^1 = 2.0 N_p$ odpowiadają wartości względne sił podłużnych w linach, pokazane na Rys. 9.5c jako $P^1/N_p = 2.0$, $N_1^1/N_p = 1.0$, $N_2^1/N_p = 0.67$, $N_3^1/N_p = 0.33$. Na Rys. 9.5b narysowano wartości względne przemieszczeń sztywnej poprzeczki $u_L(P_s)/u_L = 1.33$ oraz końców lin $u_1/u_p = 1.0$, $u_2/u_p = 0.67$, $u_3/u_p = 0.33$. Na Rys. 9.5g naniesiono położenie punktu 1, odpowiadające pierwszemu uplastycznieniu w linach, na tzw. *ścieżce równowagi*. Jest to krzywa zależności $P(u_L)$ rysowana na płaszczyźnie $(P/P_p, u_L/u_p)$. Punkty nieciągłości ścieżki równowagi odpowiadają kolejnym uplastycznieniom lin. Punkt 1 odpowiada nośności sprężystej ustroju, określonej przez (9.4.1).

Dalszy wzrost obciążenia powoduje uplastycznienie linii ②, Rys. 9.5e, skąd wynika obciążenie P^2 , por. Rys.9.5c:

$$P^2 / N_p = (1.0 + 1.0 + 0.5) = 2.5 \tag{9.4.2}$$

i odpowiednio $u_p(P^2)/u_L = 2.0$, Rys.9.5b, g.

Zwiększenie obciążenia P prowadzi do stanu sprężysto-plastycznego, w którym obok odkształceń plastycznych występują odkształcenia sprężyste $\varepsilon < \varepsilon_p$. W szczególności jest to stan **2**, por. Rys. 5c), w którym uplastycznieniu ulegają pręty **1** i **2** tj. $N_1 = N_2 = N_p$ natomiast $N_3 = 0.5 N_p$.

Upłastycznieniu liny **3** towarzyszy obciążenie

$$P^3 / N_p \equiv P_p = (1.0 + 1.0 + 1.0) = 3.0 . \quad (9.4.3)$$

i przemieszczenie $u_l/u_p (P^3) = 4.0$. Ponieważ wszystkie liny uległy uplastycznieniu następuje osiągnięcie stanu granicznego **3**, dla którego $P^3 \equiv P_p$ i dalszy wzrost obciążenia jest niemożliwy, gdyż ustrój zmienia się w mechanizm (teoretycznie przemieszczenie może rosnąć nieograniczenie, tj. $u_l(P_p) \rightarrow \infty$).

Reasumując można stwierdzić, że:

- 1) osiągnięcie nośności sprężystej wiąże się z powstaniem pierwszego uplastycznienia ustroju;
- 2) nośność plastyczna (graniczna) ma charakter globalny, gdyż oznacza wyczerpanie nośności ustroju przez jego przekształcenie w mechanizm.

Koszt uplastycznienia części czy też całego ustroju można wykorzystać *zapas nośności* jaki określa względna różnica $(P_p - P_s) / P_s$. Zapas nośności ZN oblicza się wzorem

$$ZN = \left(\frac{P_p - P_s}{P_s} \right) \times 100\% \equiv (P_p / P_s - 1) \times 100\% . \quad (9.5)$$

Zapasy nośności analizowanego ustroju wynosi, por. Rys. 9.5g:

$$ZN = (3N_p / 2.0N_p - 1) 100\% = 50\% .$$

To oznacza, że obciążenie nośności sprężystych można jeszcze zwiększyć o 50% aby osiągnąć nośność graniczną ustroju.

9.2.3. Zginanie sprężysto-plastycznego pręta

Założenia:

Do stosunkowo prostych zagadnień TP należy zginanie prętów sprężysto-plastycznych. Opierając się na następujących założeniach:

1. Pręt ma *przekrój monosymetryczny*, z płaszczyzną zginania (x, y) , Rys. 9.6a.
2. W pręcie występuje *jednoosiowe pole naprężeń* $\sigma_x = \sigma(x, y)$.
3. Rozpatruje się *stan czystego zginania*, tzn. w odniesieniu do przekroju poprzecznego o polu przekroju A będzie zerowała się siła podłużna $N(x)$ i występuje tylko moment zginający $M(x)$. Warunki czystego zginania są określone przez następujące wzory:

$$N(x) = \iint_A \sigma(x, y) dA \equiv 0 , \quad M(x) = \iint_A \sigma(x, y) y dA . \quad (9.6)$$

4. Obowiązuje *prawo płaskich przekrojów* Bernoulliego-Eulera, Rys. 9.6b:

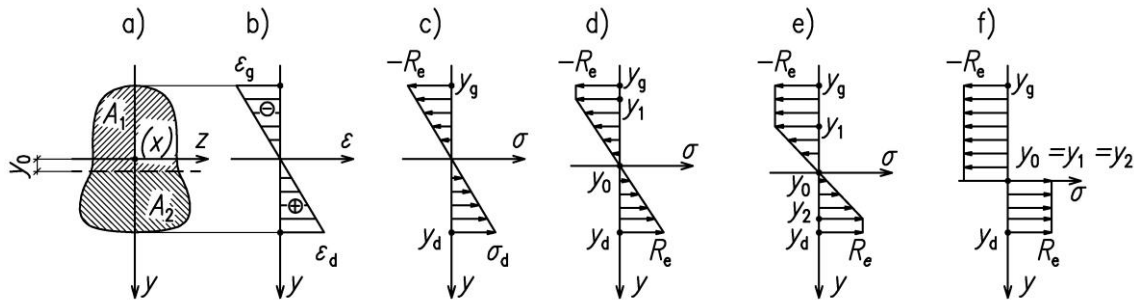
$$\varepsilon(x, y) = \kappa(x) y , \quad (9.7)$$

gdzie: $\kappa(x)$ – krzywizna osi pręta, którą dla małych ugięć (dokładniej małych kątów obrotu przekroju pręta) określa wzór:

$$\kappa(x) = -\frac{d^2v}{dx^2} \equiv -v_{,xx} , \quad (9.8)$$

gdzie: $v(x)$ – ugięcie pręta, por. Rys. 9.7a.

5. Przyjmuje się model materiału idealnie sprężysto-plastycznego o symetrycznych właściwościach na ściskanie/rozciąganie, Rys. 9.4c:

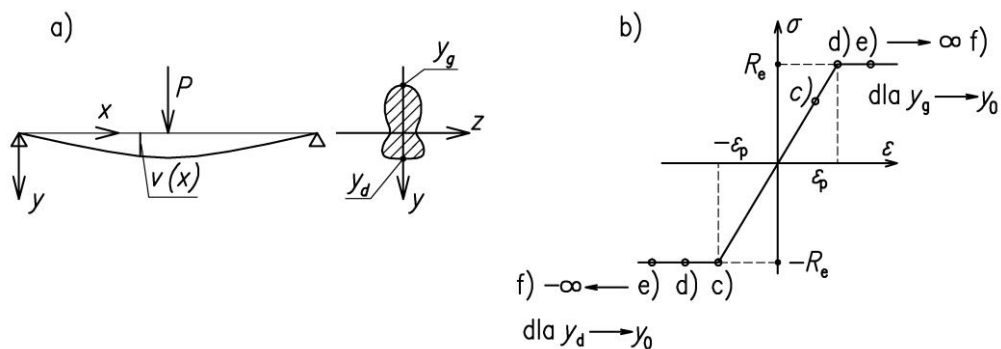


Rys. 9.6: a) Przekrój monosymetryczny, b) Liniowy rozkład odkształceń, c) Sprężysty rozkład naprężeń, d, e) Naprężenia przy jednostronnym i dwustronnym uplastycznieniu przekroju pręta, f) Całkowite uplastycznienie przekroju

Rozwijanie się uplastycznienia przekroju.

Na Rys. 9.6 pokazano zmiany rozkładu naprężeń $\sigma(x,y)$ w przekroju poprzecznym o rzędnej x , por. Rys. 9.7a, przy rosnącej wartości momentu zginającego $M(x)$. Zgodnie ze wzorem (9.7) rozkład naprężeń $\varepsilon(x,y)$ wzdłuż osi y będzie stale liniowy, Rys. 9.6b. Inaczej jest z naprężeniami $\sigma(x,y)$, gdyż w każdym punkcie y musi być też spełnione równanie materiału $\sigma(\varepsilon)$, Rys. 9.7b.

Kolejne rysunki 9.6c,d,e,f pokazują zmiany naprężeń i odkształceń przy wzroście obciążenia. W najbardziej wyężonym przekroju belki (np. w środku rozpiętości belki na Rys. 9.7a) mogą powstać odpowiednio następujące rozkłady naprężeń: c) sprężysty Rys. 9.6c, d) jednostronne uplastycznienie, Rys. 9.6d, e) dwustronne uplastycznienie, Rys.9.6e, f) całkowite uplastycznienie przekroju, Rys. 6f.



Rys. 9.7: a) Przykład zginania belki sprężysto-plastycznej, b) Naprężenia w skrajnych włóknach y_d i y_g w środku rozpiętości belki

Na Rys. 9.7b pokazano wzrost odkształceń, odpowiadających uplastycznieniu przekroju jak na Rys.9.6a. Granica zakresu sprężystego jest określona współrzędnymi y_1 oraz y_2 , aby dla pełnego

uplastycznienia otrzymać $y_1 = y_2 = y_0$, gdzie współrzędną y_0 określa położenie osi obojętnej, por. Rys. 9.6f, obliczane wzorem (9.6)₁.

Rozwijanie się uplastycznienia przekroju zależy od wartości krzywizny κ we wzorze (9.7). Jeśli napiszemy

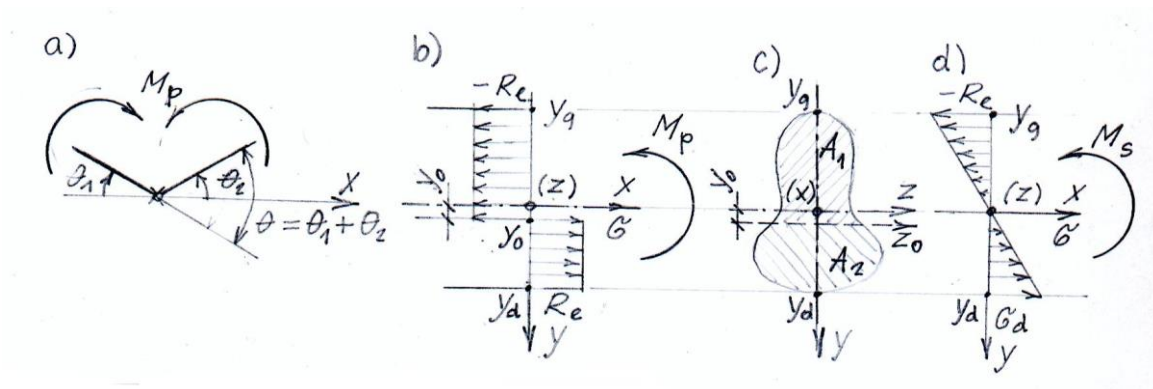
$$\kappa y_1 = -\varepsilon_p, \quad \kappa y_2 = \varepsilon_p,$$

to odejmując te równania stronami otrzymujemy wzór na krzywiznę:

$$\kappa = \frac{2\varepsilon_p}{y_2 - y_1} = \frac{2R_e}{E(y_2 - y_1)}. \quad (9.9)$$

Przegub plastyczny dla zginania i plastyczny wskaźnik wytrzymałości.

Ze wzoru (9.9) wynika, że dla $y_2 \rightarrow y_1$ krzywizna będzie rosła nieograniczenie $\kappa \rightarrow \infty$, a więc promień krzywizny $\rho = 1/\kappa \rightarrow 0$. W ten sposób łączy się przypadek pełnego uplastycznienia z osobliwością jaką jest zmierzanie promienia krzywizny do 0, por. Rys. 9.8. Punkt na osi pręta, w którym występuje dyskutowana osobliwość krzywizny jest *przegubem plastycznym*, gdyż wokół niego mogą powstać dowolne obroty θ . W przegubie plastycznym moment zginający o wartości granicznej M_p nie ulega zmianie, natomiast kąt $\theta = \theta_1 + \theta_2 \neq 0$ może przyjmować dowolne wartości.



Rys.9.8: a) Przegub plastyczny i działający w nim moment plastyczny (graniczny) M_p , b) Rozkład naprężeń odpowiadający momentowi M_p , c) Położenie osi obojętnej z_0 dla pełnego uplastycznienia przekroju, d) Rozkład naprężeń, odpowiadający momentowi M_s , określającemu nośność sprężystą przekroju.

Moment plastyczny M_p oblicza się względem osi obojętnej z_0 , przesuniętej od osi ciężkości z na odległość y_0 , por. Rys. 9.8c. Wartość y_0 oblicza się z *warunku zerowania się siły podłużnej* (rozpatruje się czyste zginanie):

$$N(x) = \iint_A \sigma(y; x) dA = -R_e \iint_{A_1} y dF + R_e \iint_{A_2} y dF = R_e \times (-A_1 + A_2) = 0,$$

co daje warunek, z którego oblicza się y_0 :

$$\boxed{A_1 = A_2 \rightarrow y_0} \quad (9.10)$$

Znając pola powierzchni A_1 i A_2 liczysię moment plastyczny M_p zginania przekroju całkowicie uplastycznionego:

$$M_p = \iint_A \sigma y dA = -R_e \iint_{A_1} y dF + R_e \iint_{A_2} y dF = -R_e S_1 + R_e S_2.$$

Otrzymuje się w ten sposób wzór na *moment plastyczny* M_p określony wzorem:

$$\boxed{M_p = R_e W_p}, \quad (9.11p)$$

gdzie występuje *plastyczny wskaźnik wytrzymałości*:

$$\boxed{W_p = |S_1| + |S_2|}. \quad (9.12)$$

Moment (9.11p) jest też momentem granicznym wyczerpania nośności przekroju poprzecznego dla czystego zginania, tj. $M_p = M_G$.

Tutaj należy przypomnieć *nośność sprężystą* przekroju poprzecznego *dla czystego zginania*:

$$M_s = R_e W_s, \quad (9.11s)$$

gdzie *sprężysty wskaźnik wytrzymałości* W_s jest definiowany wzorem z wytrzymałości materiałów:

$$W_s = \frac{I_z}{y_{\max}}. \quad (9.12s)$$

W (9.12s) odległość $y_{\max} = \max(|y_g|, |y_d|)$ jest odmierzana od osi ciężkości z , por. Rys.9.8c.

Przykłady obliczania W_p i W_s

1. **Przekrój prostokątny.** Taki przekrój jest *bisymetryczny* skąd wynika, że rzędna $y_0 = 0$, a więc osie z i z_0 pokrywają się. Dla pola $A = b \times h$ otrzymuje się wzory:

$$W_p = 2 \frac{h}{2} \frac{h}{4} \equiv \frac{bh^2}{4}, \quad W_s = I_z \frac{2}{h} = \frac{bh^3}{12} \frac{2}{h} \equiv \frac{bh^2}{6}. \quad (9.13)$$

Między momentem plastycznym M_p i momentem sprężystym M_s zachodzi związek:

$$M_p = 1.5 M_s, \quad (9.14)$$

a więc nośność plastyczna przekroju prostokątnego M_p jest o 50% wyższa niż nośność sprężysta określana przez moment M_s , tzn. że zapas nośności przekroju $ZN = 50\%$.

2. **Monosymetryczny przekrój teowy.** Wymiary przekroju pokazano na Rys. 9.10. Wartości wielkości geometrycznych oblicza się jako różnicę wartości dla pola przekroju poprzecznego ograniczonego konturem zewnętrznym minus wartość wielkości dla otworu:

• Zakres sprężysty

$$A = A_1 + A_2 = 5 a^2 + 7 a^2 = 12 a^2,$$

$$S_{B-B} = 5a^2 \times 0.5a^2 + 7a^2(a + 3.5a)30$$

$$= 2.5a^3 + 31.5a^3 = 34.0a^3,$$

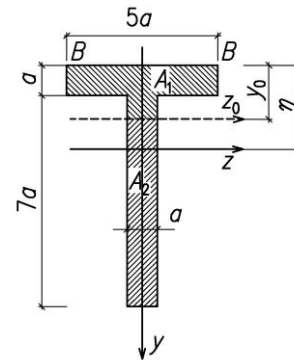
$$\eta = \frac{34.0}{12} = 2.83a,$$

$$I_z = \frac{5a \times 8a^3}{12} + (5a \times 8a) \times (4a - 2.83a)^2$$

$$- \frac{4a \times 7a^3}{12} - (4a \times 7a) \times (4.5a - 2.83a)^2$$

$$= 75.67a^4$$

$$W_s = \frac{75.67}{(8.0 - 2.67)} = 14.64a^3.$$



Rys.9.9. Monosymetryczny przekrój teowy

• Zakres plastyczny

$$5a^2 + a \times (y_0 - a) = a \times (8.0 - y_0) \rightarrow y_0 = 2a$$

$$|S_1| = 5a^2 \times (2 - 0.5)a + a^2 \frac{1}{2}a = 8.0a^2,$$

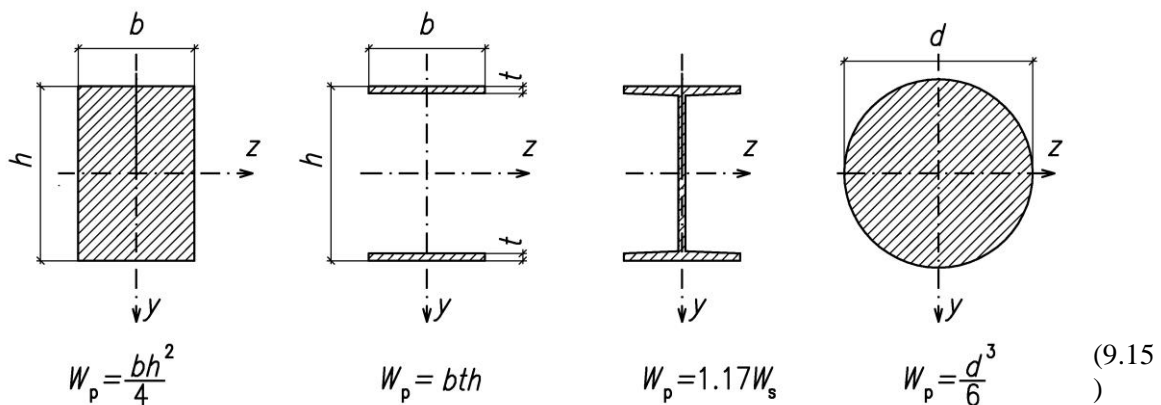
$$S_2 = \frac{1}{2}(8.0 - 2.0)^2 a^3 = 18.0a^3,$$

$$W_p = 8.0a^3 + 18.0a^3 = 26.0a^3.$$

• Zapas nośności przekroju

$$ZN = \left(\frac{26.0}{14.67} - 1 \right) \times 100\% = 77.6\%.$$

Na Rys. 9.10 pokazano wartości *plastycznych wskaźników wytrzymałości* dla kilku wybranych, bisymetrycznych przekrojów poprzecznych.



Rys. 9.10. Plastyczne wskaźniki wytrzymałości dla wybranych przekrojów :
a) prostokąt, b) idealny przekrój dwuteowy, c) walcowany dwuteownik, d) koło

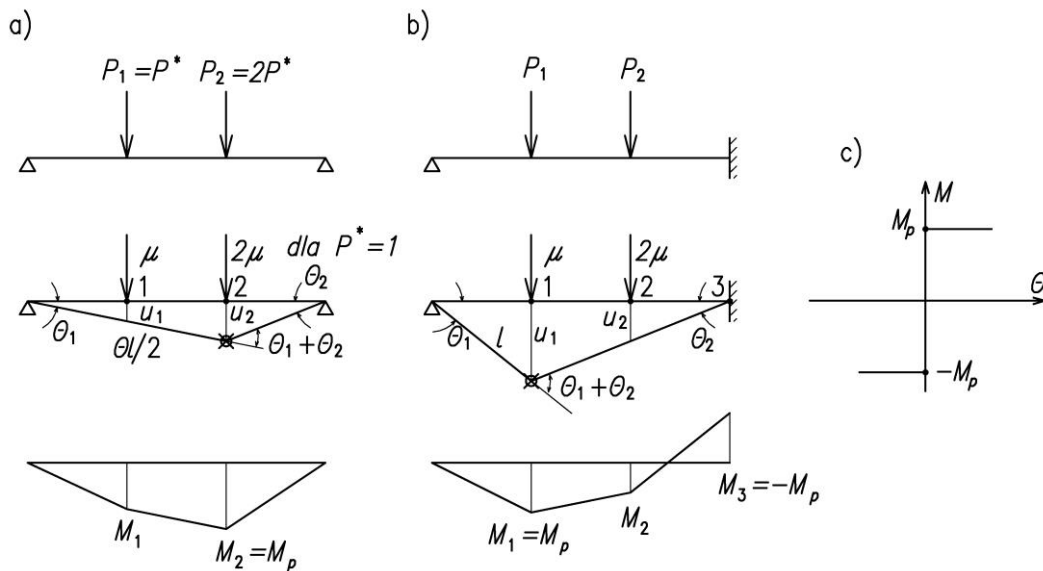
9.2.5. Nośność graniczna belek i ram płaskich

Obliczanie nośności płaskich ustrojów prętowych może być znacznie uproszczone przez przyjęcie modelu pręta ze *skupioną strefą plastyczną* (model materiału sztywno-plastycznego), która odpowiada powstaniu przegubu plastycznego. Nośność liczy się dla *obciążeń jedno-parametrowych*, tzn., że wszystkie składowe wektorów obciążeń przykładanych do ustroju rosną proporcjonalnie do *jednego parametru obciążenia* μ . Na Rys. 9.13 pokazano belki obciążone wektorem obciążeń:

$$\mathbf{P} = \{P_1, P_2\} = \mu \mathbf{P}^*, \text{ gdzie: } P_1 = \mu P_1^* \text{ i } P_2 = \mu P_2^* \quad (9.32)$$

Należy podkreślić, że *wektor odniesienia* \mathbf{P}^* ma wymiar siły, tj. składowe tego wektora mają $[P_i^*] = \text{kN}$, a *parametr obciążenia* μ jest bezwymiarowy. W przypadku gdy np. $\mathbf{P}^* = \{1, 2\}$ kN czasami zapisuje się $P_1 = \mu$, $P_2 = 2\mu$, co oznacza, że parametr obciążenia jest wymiarowy.

Na Rys. 9.13 pokazano belki obciążone dwoma siłami $P_1 = \mu$ i $P_2 = 2\mu$. Nośność graniczna jest osiągnięta dla wartości parametru μ_{pl} , dla którego w ustroju tworzą się przeguby plastyczne, które czynią ustrój chwiejny, tzn. zamieniają go w *mechanizm*. Zakłada się przy tym, że między przegubami części ustroju są idealnie sztywne. Liczba przegubów plastycznych wiąże się ze *stopniem statycznej niewyznaczalności* n . W przypadku ustroju statycznie wyznaczalnego wystarczy tylko jeden przegub, dla statycznie niewyznaczalnego trzeba $n + 1$ przegubów. Dalsze wyjaśnienia prowadzone są na przykładzie belki jedno-przęsłowej, Rys. 9.13.



Rys.9.13: a, b) Belki statycznie wyznaczalna i niewyznaczalna, ich schemat statyczny, mechanizm plastyczny i wykresy momentów zginających, c) Model fizyczny dla sztywno-plastycznego zginania

9.2.5.1. Założenia, metoda kinematyczna i statyczna.

W dalszym ciągu oparto się na następujących założeniach:

1. Rozpatruje się *belki i ramy płaskie*, złożone z prętów zginanych, obciążonych jedynie siłami lub momentami skupionymi, tak że między węzłami i punktami charakterystycznymi wykresy momentów są odcinkowo liniowe;

2. Zakłada się *model sztywno plastyczny dla momentów zginających* przekrój, Rys. 9.13c, gdzie w przegubie plastycznym moment ma wartość momentu plastycznego M_p ;

3. Stosuje się *dwie metody obliczania* nośności granicznej:

a) *Metoda statyczna* polega na obliczaniu takiej wartości parametrów obciążenia μ_s , dla których są spełnione warunki równowagi i nie jest przekroczony warunek plastyczności (moment zginający $|M| \leq M_p$) we wszystkich punktach ustroju;

b) *Metoda kinematyczna* polega na obliczaniu wartości parametrów obciążenia μ_k przy założeniu takiej liczby przegubów plastycznych, które uczynią ustrój mechanizmem.

Tworzenie mechanizmu

Ustrój będzie przechodził w mechanizm na skutek tworzenia się przegubów plastycznych. Liczba przegubów plastycznych wynosi

$$p \leq n + 1, \quad (9.33)$$

gdzie: n – stopień statycznej niewyznaczalności ustroju. Przeguby plastyczne mogą tworzyć się w *punktach charakterystycznych*, którymi mogą być: 1) punkty osi prętów układu prętowego, w których są przykładane uogólnione siły skupione, 2) węzły, w których schodzą się pręty lub są podpory, 3) punkty nieciągłości wskaźnika plastycznego wytrzymałości W_p .

Mechanizm typowy jest określony liczbą przegubów p :

$$p = n + 1. \quad (9.34)$$

Przypadek $p < n + 1$ występuje w *mechanizmach lokalnych*, tj. w prętach brzegowych lub częściach statycznie wyznaczalnych rozpatrywanych konstrukcji *prętowych*.

Dalej rozpatruje się mechanizmy typowe. *Liczba typowych mechanizmów* m jest równa liczbie kombinacji

$$m = \binom{s}{n+1} = \frac{s!}{(n+1)! [s-(n+1)]!}, \quad (9.35)$$

gdzie: s – liczba punktów charakterystycznych.

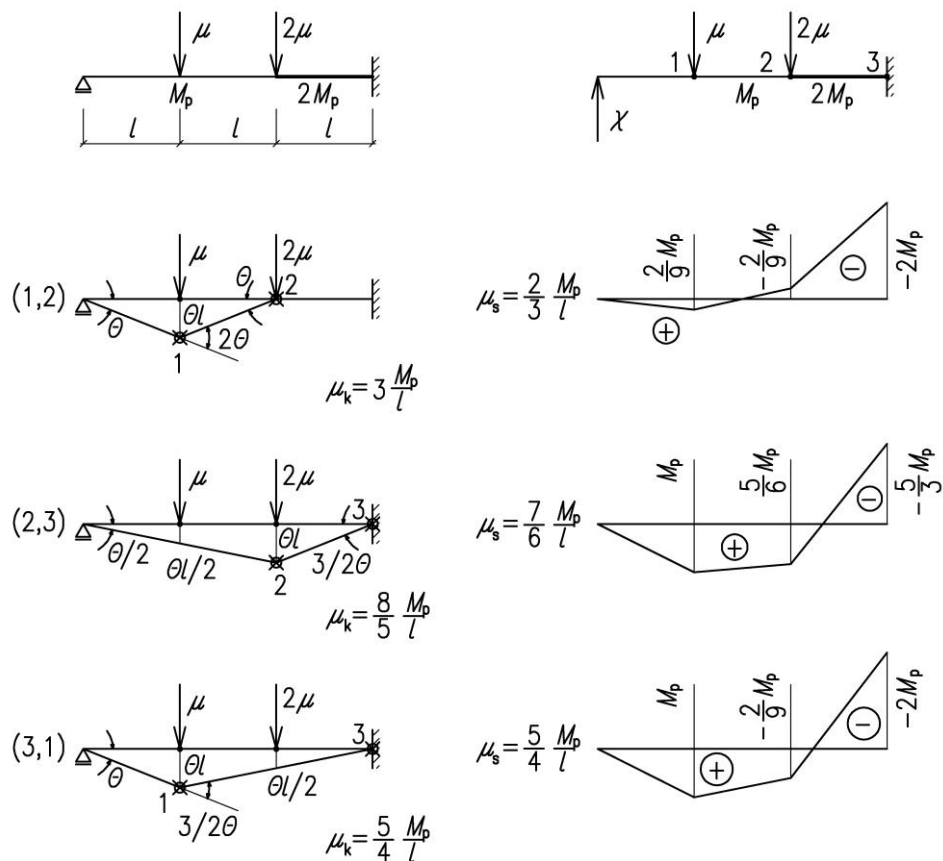
9.5.2.2. Przykład belki jednoprzęsłowej.

W dalszym ciągu objaśnione są obydwie metody na przykładzie belki jednoprzęsłowej o danych pokazanych na Rys. 9.14a. Belka składa się z trzech elementów o węzłach odpowiadających trzem punktom charakterystycznym. Element belki 2–3 ma dwa razy większy moment plastyczny $2M_p$ niż pozostałe elementy.

Belka rozpatrywana na Rys. 9.14 jest $n = 1$ statycznie niewyznaczalna, stąd potrzeba $p = n + 1 = 2$ przegubów plastycznych, aby belka zamieniła się w mechanizm. Liczba punktów charakterystycznych dla belki na Rys. 9.14b wynosi $s = 3$, skąd wynika liczba mechanizmów $m = \binom{3}{2} = 3$, które zapisuje się jako możliwe kombinacje punktów charakterystycznych:

$$(1, 2), (2, 3), (3, 1). \quad (9.36)$$

Na Rysunkach 9.14c pokazano mechanizmy odpowiadające przegubom plastycznym odpowiadającym (9.36). Na rysunkach mechanizmów przy przegubach zaznaczono wartości obrotów przegubów plastycznych i przemieszczeń w punktach przyłożenia obciążeń.



Rys.9.14 a) Schemat analizowanej belki, b) Przyjęty układ podstawowy MS, c) Mechanizmy i uogólnione przemieszczenia, d) Statycznie dopuszczalne wykresy momentów zginających, odpowiadające mechanizmom na Rys. 9.14c

Metoda statyczna

Przyjmuje się jeden z możliwych schematów podstawowych metody sił z niewiadomymi siłami hiperstatycznymi. Na Rys.9.14b pokazano wspornik z siłą hiperstatyczną X . Dla tego schematu pisze się równania równowagi momentów w punktach charakterystycznych:

$$M_1 = X l, \quad M_2 = 2 X l - \mu l, \quad M_3 = 3 X l - 4 \mu l. \quad (9.37)$$

Teraz można napisać równania równowagi dla przegubów i dodatkowe równania dla punktu, w którym nie zakłada się istnienia przegubu. Niżej napisano takie równania dla pierwszego przypadku z (9.36)

$$\begin{aligned} X l &= M_p, \\ (1, 2): \quad 2 X l - \mu l &= -M_p, \\ M_3 &= 3 X l - 4 \mu l. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Z dwóch pierwszych równań oblicza się wartość reakcji hiperstatycznej X i parametru obciążenia μ :

$$X = \frac{M_p}{l}, \quad \mu = 3 \frac{M_p}{l} \quad (9.38a)$$

oraz moment w punkcie 3, w którym nie założono powstania przegubu plastycznego:

$$M_3 = 3 M_p - 4 \times 3 M_p = -9 M_p. \quad (9.38b)$$

Ponieważ w punkcie 3 może powstać co najwyżej moment plastyczny $-2 M_p$ dlatego wprowadza się *mnożnik korekcyjny* poprawiający wartość parametru μ i siły hiperstatycznej X tak, aby nie została przekroczona wartość momentu plastycznego w przegubach plastycznych:

$$k = \left| \frac{-2M_p}{M_3} \right| = \frac{2}{9} \rightarrow \mu_s = k \mu = \frac{2}{3} \frac{M_p}{l}, \quad X_s = \frac{2}{9} \frac{M_p}{l}. \quad (9.39)$$

Podstawienie (9.39) do (9.37) daje wartości momentów w punktach charakterystycznych:

$$M_{1s} = \frac{2}{9} M_p, \quad M_{2s} = -\frac{2}{9} M_p, \quad M_{3s} = -2 M_p. \quad (9.40)$$

Na Rys. 9.14d pokazano wykres momentów zginających dla przypadków (i, j) przewidywanych przegubów. Okazuje się, że statyczna dopuszczalność (nieprzekraczanie wartości momentu plastycznego) w punkcie 3 prowadzi do pojawienia się przegubu plastycznego w tym punkcie i znikania założonych wcześniej przegubów plastycznych w punktach 1 i 2.

Wyżej opisany algorytm jest powtarzany dla wstępnego wyboru przegubów plastycznych (2, 3) co daje następujące równanie i ciąg rozwiązywania

$$\begin{aligned} 2 X l - \mu l &= M_p, \\ (2,3): \quad 3 X l - 4 \mu l &= -2 M_p, \\ M_1 &= X l, \end{aligned} \quad (9.41)$$

skąd oblicza się:

$$\begin{aligned} X &= \frac{6}{5} \frac{M_p}{l}, \quad \mu = \frac{7}{5} \frac{M_p}{l}, \quad M_1 = \frac{6}{5} M_p \rightarrow k = \frac{5}{6}, \\ \mu_s &= \frac{7}{6} \frac{M_p}{l}, \quad X_s = \frac{M_p}{l}, \quad M_{1s} = M_p, \quad M_{2s} = \frac{5}{6} M_p, \quad M_{3s} = -\frac{5}{3} M_p. \end{aligned} \quad (9.41a)$$

Obliczenia wykonane dla wstępnego wyboru przegubów (3,1) dają wartości:

$$(3,1): \quad k = 1, \quad \mu_s = \frac{5}{4} \frac{M_p}{l}, \quad M_{1s} = M_p, \quad M_{2s} = \frac{3}{5} M_p, \quad M_{3s} = -2 M_p. \quad (9.42)$$

Ponieważ obliczony moment $|M_3|$ nie przekracza założonej wartości momentu plastycznego przekroju poprzecznego, tj. $2 M_p$, to rozwiązanie (9.42) jest *statycznie dopuszczalne*.

Wykresy momentów dla kombinacji przegubów plastycznych (9.36) zostały narysowane na Rys. 9.3d.

9.5.2.3. Podstawowe twierdzenia nośności granicznej

Jeśli zbuduje się zbiór obliczonych wartości statycznych parametrów obciążenia, to można zastosować *twierdzenie statyczne teorii nośności granicznej* [*6,*11]:

Jeśli ustrój jest w stanie równowagi i w żadnym punkcie charakterystycznym nie jest przekroczy stan graniczny nośności plastycznej przekroju to nośność graniczna ustroju odpowiada maksymalnej wartości parametru obciążenia:

$$\mu_{Gs} = \max_s \{ \mu_s \}, \quad (9.43)$$

gdzie: μ_s – wartość parametru obciążenia dla statycznie dopuszczalnego stanu naprężeń.

Wracając do rozpatrywanego przykładu dla belki z Rys. 9.14 niżej podano uporządkowane wartości μ_s , skąd wynika, że maksymalna wartość $\mu_s = \mu_G$ jest równa nośności granicznej ustroju:

$$\mu_{Gs} = \max \left\{ \frac{2 M_p}{3 l}, \frac{7 M_p}{6 l}, \frac{5 M_p}{4 l} \right\} = \frac{5 M_p}{4 l}. \quad (9.44)$$

Otrzymane rozwiązanie statyczne jest nazywane stanem granicznym, gdyż daje mechanizm (3,1), pokazany na Rys. 9.14c.

Metoda kinematyczna.

Ta metoda opiera się na zastosowaniu mechanizmów i obliczanie ich chwilowego stanu równowagi. W tym celu jest stosowana **zasada prac wirtualnych** :

Jeśli ustrój jest w stanie równowagi i spełnione są zewnętrzne więzy kinematyczne i równania geometryczne to praca naprężeń na wirtualnych odkształceniach jest równa pracy obciążeń na wirtualnych przemieszczeniach.

Zasada prac wirtualnych odnosi się też do wielkości uogólnionych (momenty zginające-względne kąty obrotów). W przypadku belek i ram zasada prac wirtualnych przyjmuje postać

$$\sum_i M_{pi} \theta_i = \mu_k \sum_j P_j^* u_j, \quad (9.45)$$

gdzie lewa strona (9.45) jest pracą momentów na względnych obrotach θ_i (wirtualne krzywizny) w przegubach plastycznych, a prawa strona jest pracą obciążeń $P_j = u_j P_j^*$ na wirtualnych przemieszczeniach u_j (są one zgodne z więzami, a więc też zależą od obrotów θ_i). W (9.45) P_j^* są składowymi wektora konfiguracji obciążeń.

W odniesieniu do rozpatrywanego przykładu belki z Rys. 9.14a można posługiwać się mechanizmami z Rys. 9.14c. Należy tylko dodać, że znaki momentów M_p oraz kątów obrotu θ_i są zgodne więc można dalej stosować zasadę prac wirtualnych bez zwracania uwagi na zwroty momentów ze względu na dodatnia wartość iloczynu $M_{pi} \theta_i$ w sumie po prawej stronie wzoru (9.45):

$$\begin{aligned} (1,2): \quad 2M_p \theta + M_p \theta &= \mu \theta l \quad \rightarrow \mu_k = 3 \frac{M_p}{l}, \\ (2,3): \quad M_p \frac{3}{2} \theta + 2M_p \theta &= \mu \frac{\theta l}{2} + 2\mu \theta l \quad \rightarrow \mu_k = \frac{8 M_p}{5 l}, \\ (3,1): \quad 2M_p \frac{\theta}{2} + M_p \frac{3}{2} \theta &= \mu \theta l + 2\mu \frac{\theta l}{2} \quad \rightarrow \mu_k = \frac{5 M_p}{4 l}. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Dalej stosuje się **twierdzenie kinematyczne nośności granicznej** [*11], które mówi:

Nośność graniczna jest określana minimalną wartością kinematycznego parametru obciążenia dla kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów:

$$\mu_{Gp} = \min_k \{ \mu_k \}. \quad (9.47)$$

W przypadku rozpatrywanej belki jest zgodnie z (9.47):

$$\mu_{Gk} = \min \left\{ 3 \frac{M_p}{l}, \frac{8}{5} \frac{M_p}{l}, \frac{5}{4} \frac{M_p}{l} \right\} = \frac{5}{4} \frac{M_p}{l}. \quad (9.48)$$

Otrzymuje się więc nośność belki, tj. określoną wartością parametru obciążenia μ_G , taką samą dla metody statycznej i kinematycznej.

W odniesieniu do wyżej podanych twierdzenie obowiązuje **podstawowe twierdzenie nośności granicznej** (twierdzenie pełne), które zapisuje się w postaci wzoru:

$$\mu_{Gs} \leq \mu_G \leq \mu_{Gk} \rightarrow \mu_G \equiv \max_s \{ \mu_s \} = \min_k \{ \mu_k \}. \quad (9.49)$$

Nośność graniczną na ogół dużo łatwiej wyznacza się metodą kinematyczną niż statyczną. Z twierdzenia (9.49) wynika ważny wniosek obliczeniowy. Jeśli obliczy się nośność graniczną metodą kinematyczną to *rozwiązanie pełne* otrzyma się z metody statycznej jeśli pozwoli ona obliczyć rozwiązanie, dla którego $\mu_s = \mu_k$.

9.5.2.4. Rama portalowa

Rama jest 2-krotnie statycznie niewyznaczalna, tj. $n = 2$, i ma $s = 4$ punktów charakterystycznych. W obydwu metodach rozpatruje się $m = 4$ mechanizmy, wynikające ze wzoru (9.35):

$$m = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4, \quad (9.50)$$

Mechanizmy mogą powstać z przegubów w wymienionych w następujących kombinacjach punktów charakterystycznych:

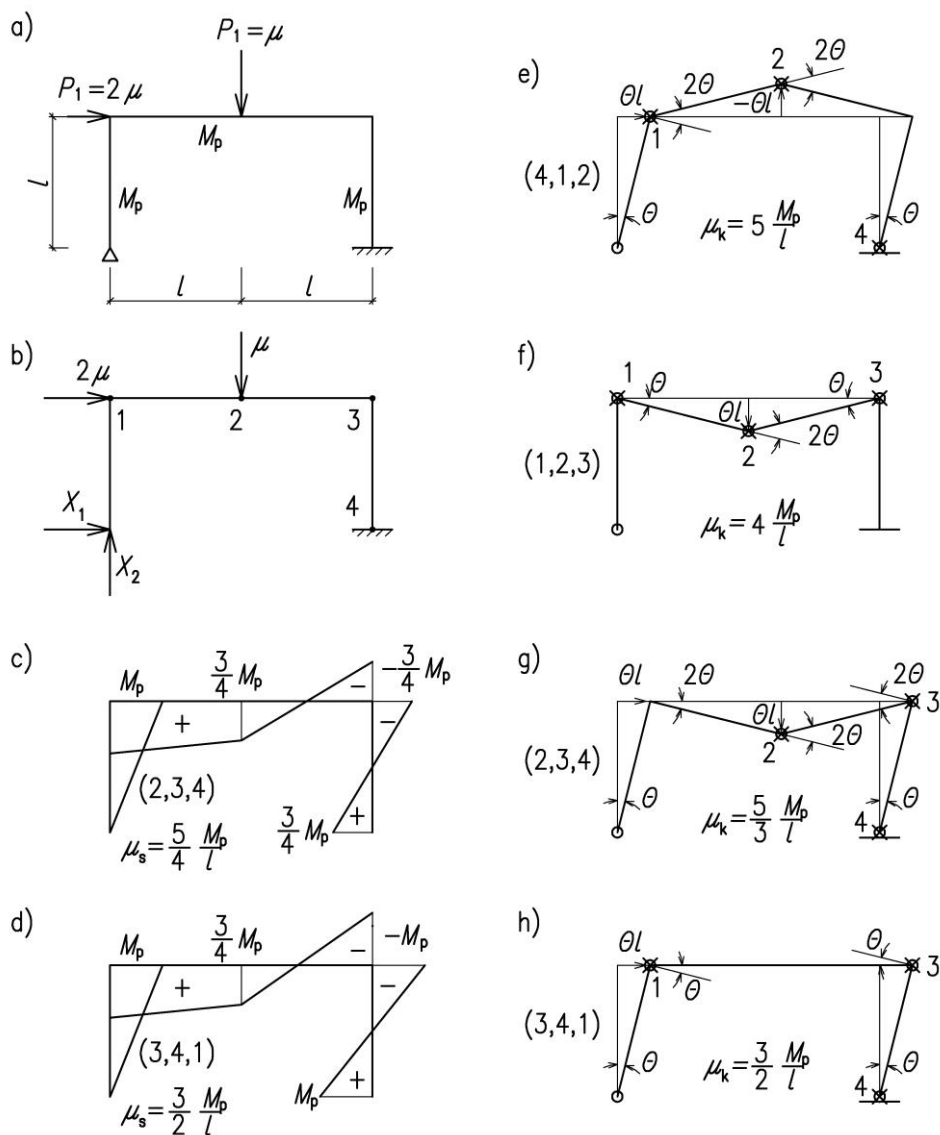
$$(1,2,3), (2,3,4), (3,4,1), (4,1,2). \quad (9.51)$$

Obliczenia rozpoczyna się od metody kinematycznej. Dla kombinacji (9.51) przegubów plastycznych pokazanych na Rys. 9.14b, zapisuje się równania zasady prac wirtualnych (9.45):

$$\begin{aligned} (4,1,2): \quad (1 + 2 + 2) M_p \theta &= (2 - 1) \mu \theta l \rightarrow \mu_k = 5 \frac{M_p}{l}, \\ (1,2,3) \quad (1 + 2 + 1) M_p \theta &= \mu \theta l \rightarrow \mu_k = 4 \frac{M_p}{l}, \\ (2,3,4): \quad (2 + 2 + 1) M_p \theta &= (2 + 1) \mu \theta l \rightarrow \mu_k = \frac{5}{3} \frac{M_p}{l}, \\ (3,4,1): \quad (1 + 1 + 1) M_p \theta &= 2 \mu \theta l \rightarrow \mu_k = \frac{3}{2} \frac{M_p}{l}. \end{aligned} \quad (9.52)$$

Zgodnie z twierdzeniem kinematycznym otrzymuje się:

$$\mu_G = \min \left(5 \frac{M_p}{l}, 4 \frac{M_p}{l}, \frac{5 M_p}{3 l}, \frac{3 M_p}{2 l} \right) = \frac{3 M_p}{2 l} . \quad (9.53)$$



Rys. 9.15: a) Schemat ramy i dane, b) Siły hiperstatyczne, c,d) Wykresy momentów otrzymane metoda statyczną, e, h) Mechanizmy dla metody kinematycznej

Analizę za pomocą metody statycznej rozpoczyna się od sformułowania układu równań równowagi w punktach charakterystycznych. W tym celu przyjęto układ podstawowy metody sił jako „zakrzywiony” wspornik, pokazany na Rys. 9.15c. Odpowiedni układ równań równowagi ma postać:

$$M_1 = -X_1 l, \quad M_2 = -X_1 l + X_2 l, \quad M_3 = -X_1 l + 2 X_2 l - \mu l, \quad M_4 = 2 X_2 l + \mu l . \quad (9.54)$$

Metoda statyczna wymaga dłuższych obliczeń niż metoda kinematyczna. Dlatego praktycznym podejściem jest rozpoczynanie obliczeń od metody kinematycznej. Po obliczeniu μ_{Gp} wystarczy sprawdzić tylko przypadek mechanizmu, który daje graniczna wartość parametru obciążenia. W tym przykładzie ramy portalowej jest to przypadek położenia przegubów plastycznych;

$$(3,4,1): M_3 = -M_p, M_4 = M_p, M_1 = M_p.$$

Po podstawieniu tych wartości do równań 99.54) otrzymuje się wartości reakcji, parametru obciążenia i momentu M_2 :

$$X_1 = -\frac{M_p}{l}, X_2 = -\frac{M_p}{4l}, \mu_s = \frac{3}{2} \frac{M_p}{l}, M_2 = \frac{3}{4} M_p.$$

W ten sposób wykazuje się, że obliczona graniczna nośność statyczna jest równa nośności granicznej $\mu_{Gs} = \mu_{Gp}$ granicznej, a więc otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem pełnym, tj. $\mu_G = (3/2) M_p/l$.

Dla porządku podano wyniki pełnego obliczenia metodą statyczną

$$\mu_{Gs} = \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \right\} \frac{M_p}{l} = \frac{3}{2} \frac{M_p}{l}. \quad (9.55)$$

Na Rys. 9.15e narysowano wykres momentów odpowiadający maksymalnemu parametrowi nośności statycznej, a więc dla nośności granicznej $\mu_G = 3M_p / 2l$. Ten wykres otrzymano dla 3-ch przegubów plastycznych w mechanizmie (3,4,1). Wykres momentów na Rys. 9.15d, przy której tworzy się jeden przegub plastyczny, otrzymano dla wartości parametru $\mu_s = 5M/4l$. Tą wartość obciążenia można przyjąć jako miarę nośności sprężystej (przyjęto mechanizm (2,3,4), które daje wartość parametru obciążenia $\mu_k = 5M/3l$). Stąd wynika zapas nośności, określany wzorem (9.5) :

$$ZN = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} - 1 \right) \times 100\% = 20\%. \quad (9.56)$$