

7. Płaski stan naprężeń (PSN) i odkształceń (PSO)

Płaskie stany występują jeśli dla jednej zmiennej (np. zmienna z) nie występują składowe odpowiedniego tensora. W przypadku *płaskiego stanu naprężeń* (PSN) lub *płaskiego stanu odkształceń* (PSO) następujące naprężenia mają wartości zerowe:

$$\text{PSN: } \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} \equiv 0, \quad (7.1\text{PSN})$$

$$\text{PSO: } \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} \equiv 0. \quad (7.1\text{PSO})$$

7.1. Płaski stan naprężenia (PSN)

7.1.1. Zestawienie niewiadomych i równań

Podstawowe niewiadome (8 zmiennych):

$$\begin{array}{ll} \text{przemieszczenia} & (u, v) \\ \text{odkształcenia:} & (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}) \\ \text{naprężenia:} & (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \end{array} \quad (7.2)$$

$$\text{dla } \nu \neq 0 \text{ i, w ogólności, 9. zmienna zależna } \varepsilon_z \neq 0. \quad (7.2a)$$

Łącznie dysponujemy 8-ma równaniami:

I. Równania równowagi

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \quad (7.3)$$

II. Równania geometryczne

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (7.4)$$

III. Równania fizyczne

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}. \quad (7.5)$$

Z równań (7.3–7.5) możemy obliczyć 8 niewiadomych (7.2). Po obliczeniu tych wielkości możemy też obliczyć *wielkości zależne*. Taką wielkością dla PSN jest odkształcenie ε_z , gdyż ze związku fizycznego (6.5)₃, tj. z zerowania się naprężenia normalnego, wynika 9. równanie, w którym po prawej stronie występują zmienne podstawowe:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) . \quad (7.6PSN)$$

Przyjmując w związkach (6.5)_{1,2} naprężenia $\sigma_z = 0$ można te dwa liniowe równania algebraiczne rozwiązać ze względu na σ_x i σ_y :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) , \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) , \quad (7.7)$$

i po podstawieniu do (7.6) otrzymujemy:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) . \quad (7.8)$$

W ten sposób udowodniliśmy **ważne twierdzenie**:

Płaskiemu stanowi naprężenia towarzyszy przestrzenny stan odkształceń przez pojawienie się odkształcenia ε_z , które jest funkcją sumy naprężeń $\sigma_x + \sigma_y$.

7.1.2. Równania w przemieszczeniach

Korzystając z równań geometrycznych (7.4) i równań fizycznych (7.7) oraz obliczając zależność dla naprężenia stycznego $\tau_{xy} = E\gamma_{xy} / (2(1+\nu))$ z (7.5)₃, możemy wyeliminować odkształcenia oraz naprężenia z równań równowagi (7.3) i otrzymać 2 równania z niewiadomymi przemieszczeniami u, v . W ten sposób otrzymujemy *równania równowagi w przemieszczeniach* (równania Lamégo). Będzie to szczególny przypadek równań (6.13):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{1-\nu^2}{E} X , \quad (7.9)$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v = -\frac{1-\nu^2}{E} Y .$$

Do tych równań dołączamy warunki brzegowe – po jednym na każdym z brzegów.

a) *Przemieszczeniowe warunki brzegowe*:

$$u(s) = f_1(x, y) , \quad v(s) = f_2(x, y) , \quad (7.10)$$

b) lub/i też *naprężeniowe warunki brzegowe*:

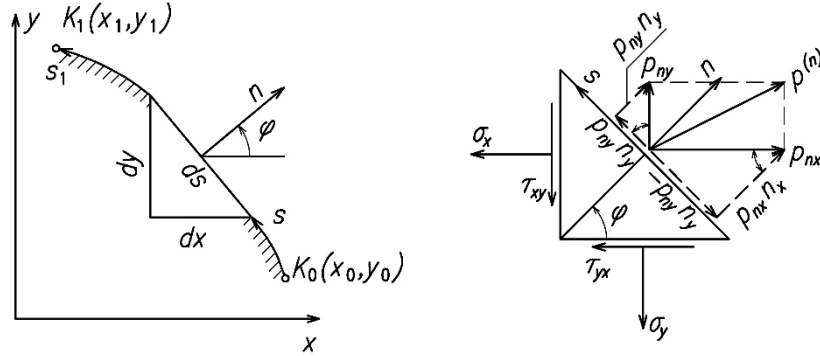
$$p_{nx} = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y , \quad p_{ny} = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y , \quad (7.11)$$

w których naprężenia wyrażamy przez odkształcenia, por. (7.7), a te z kolei przez przemieszczenia, zgodnie z równaniami geometrycznymi (7.4). W ten sposób dochodzimy do naprężeniowych warunków brzegowych, wyrażonych przez gradienty przemieszczeń:

$$p_{nx} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_y \right], \quad (7.12)$$

$$p_{ny} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) n_y \right].$$

W warunkach (7.11), (7.12) występują dostawy kierunkowe brzegu, opisywanego za pomocą zmiennej niezależnej s , por. Rys. 7.1a.



Rys. 7.1: a) Brzeg obszaru o normalnej n i zmiennej krzywoliniowej s ,
b) Intensywności obciążeń brzegowych p_{nx} i p_{ny}

Wektor normalny \vec{n} ma składowe:

$$n_x = \cos(n, x) = \frac{dy}{ds} = \cos \varphi, \quad n_y = \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds} = \sin \varphi. \quad (7.13)$$

Zamiast składowymi obciążenia brzegowego p_{nx} i p_{ny} możemy posługiwać się też składowymi p_{nm} i p_{ns} , równoległymi do kierunków n i s , por. Rys.7.1 b:

$$p_{nm} = p_{nx} n_x + p_{ny} n_y = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + 2 \tau_{xy} n_x n_y = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2 \tau_{xy} \sin 2\varphi, \quad (7.14)$$

$$p_{ns} = p_{ny} n_x - p_{nx} n_y = (\sigma_y - \sigma_x) n_x n_y + \tau_{xy} (n_x^2 - n_y^2) = \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi.$$

7.1.3. Równania w naprężeniach

Celem obliczenia naprężeń σ_x , σ_y i τ_{xy} korzystamy z dwóch równań równowagi (7.3). Trzecim równaniem jest równanie nierozdzielności, które przekształcamy jak niżej.

Do równania nierozdzielności (6.4)₁ podstawiamy równania fizyczne (7.5) zamiast ε_x , ε_y i γ_{xy} i stąd po elementarnych przekształceniach otrzymujemy zamiast:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \text{gdzie: } \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy},$$

równanie nierozdzielności wyrażone przez naprężenia:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} [\sigma_x - \nu \sigma_y] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma_y - \nu \sigma_x] = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} . \quad (7.15)$$

Równanie (7.15) przekształcamy korzystając z równań równowagi (7.3). W tym celu różniczkujemy pierwsze równanie (7.3)₁ względem x , a równanie (7.3)₂ względem y i dodajemy je, co daje zależność w naprężeniach:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 ,$$

napisaną w postaci:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) . \quad (7.16)$$

Podstawienie zależności (7.16) do (7.15) daje równanie nierozdzielności w końcowej postaci:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = - (1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) . \quad (7.17)$$

Tak więc dla PSN równania TS w naprężeniach mają następującą postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 , \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 , \\ \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) &= - (1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) , \end{aligned} \quad (7.18)$$

gdzie dla zwięzłości opisu ;posłużono się operatorem harmonicznym ∇^2 („nabla dwa”) lub „laplasjanem” Δ :

$$\nabla^2 \equiv \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} . \quad (7.19)$$

Do równań (7.18) dołączamy naprężeniowe warunki brzegowe (7.10) lub (7.14).

7.1.4. Funkcja naprężeń dla PSN

Trzy równania (7.18) dla PSN wraz z naprężeniowymi warunkami brzegowymi (7.11) lub (7.14) umożliwiają otrzymanie jednoznacznych rozwiązań dla pól naprężeń $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ oraz $\tau_{xy}(x,y)$ od pól obciążeń masowych $X(x,y)$ i $Y(x,y)$ oraz od obciążeń brzegowych $p_{nx}(s)$ i $p_{ny}(s)$.

Zamiast trzech pól naprężeń można użyć *funkcję naprężeń* (funkcją Airy'ego) $F(x,y)$, która spełnia warunki równowagi (7.18)₁₋₂ dzięki zależnościom:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int_0^s X dx, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int_0^s Y dy, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (7.20)$$

Podstawienie funkcji (7.20) do równania nierozdzielności (7.18)₃ daje:

$$\nabla^2 \nabla^2 F = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + \nabla^2 \left(\int_0^s X dx + \int_0^s Y dy \right), \quad (7.21)$$

gdzie posłużono się operatorem harmonicznym ∇^2 , określonym wzorem (7.19) oraz operatorem biharmonicznym $\nabla^2 \nabla^2$:

$$\nabla^2 \nabla^2 = \nabla^2 (\nabla^2) = \nabla^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (7.22)$$

Równanie (7.21) znacznie upraszcza się *jeśli siły masowe są stałe*, tzn. $X = c_x$, $Y = c_y$, tzn. są niezależne od zmiennych x , y . W takim przypadku mamy:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - c_x x, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - c_y y, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (7.23)$$

i równanie nierozdzielności przyjmuje postać:

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0. \quad (7.24)$$

Równanie biharmoniczne (7.24) jest oczywiście ważne również przy braku sił masowych lub uwzględnianiu tylko sił ciężkości, np. dla $c_x = 0$, $c_y = -g$.

Do równania (7.21) dołączamy naprężeniowe warunki brzegowe. W przypadku braku sił masowych, i jeśli uwzględnimy (7.13), to warunki brzegowe (7.11) przyjmują postać:

$$p_{nx} = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} n_x - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} n_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \frac{dy}{ds} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \frac{dx}{ds} \equiv \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right), \quad (7.25a)$$

$$p_{ny} = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} n_x + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} n_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \frac{dy}{ds} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \frac{dx}{ds} \equiv \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \quad (7.25a)$$

Całkowanie po łuku $\overset{\frown}{K_0 K_1}$ (Rys. 1a) daje zależność:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{K_1} = \int_0^{s_1} p_{nx} ds = R_x, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{K_1} = -\int_0^{s_1} p_{ny} ds = -R_y, \quad (7.26)$$

gdzie R_x i R_y są współrzędnymi wypadkowej (głównego wektora) obciążeń brzegowych przyłożonych do łuku $\overset{\frown}{K_0 K_1}$, równoległych odpowiednio do osi x lub y . Tak samo możemy obliczyć wartość funkcji naprężeń w punkcie K_1 , por. [4], Rys. 7.1a :

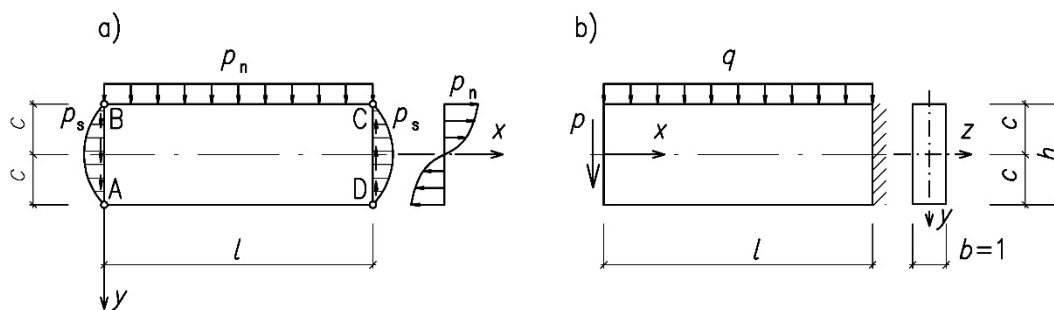
$$(F)_{K_1} = \int_0^{s_1} \left[-\frac{dx}{ds} \int_0^{s_1} p_{ny} ds + \frac{dy}{ds} \int_0^{s_1} p_{nx} ds \right] ds = - \int_0^{s_1} [(x_1 - x)p_{ny} - (y_1 - y)p_{nx}] ds \equiv M_{K_1}, \quad (7.27)$$

gdzie M_{K_1} jest momentem liczonym względem punktu K_1 od obciążeń brzegowych przyłożonych do łuku $\overset{\frown}{K_0 K_1}$, por. Rys. 7.1a .

8. Proste zagadnienia teorii sprężystości

8.1. Zginanie belkowe wspornikowej tarczy prostokątnej

Rozpatrujemy tarczę prostokątną, dla której siły masowe są pomijane i obciążenie jest przykładane tylko do konturu tarczy. Przyjmujemy, że tarcza ma jednostkową grubość $b = 1$. Rozważmy przypadek tzw. *zginania belkowego* tarczy pokazanej na Rys.8.1a. Analogiem takiej tarczy, znanym z wytrzymałości materiałów, jest belka wspornikowa z obciążeniem równomiernym q i siłą skupioną P , Rys. 8.1b.



Rys. 8.1: a) Tarcza obciążona siłami brzegowymi
b) Równoważna belka wspornikowa

8.1.1. Rozwiązania belkowe

W wytrzymałości materiałów rozpatrujemy belki jako tarcze, dla których $c/l \ll 1$. Naprężenia w belce obliczamy wzorami

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{I_z} y, \quad \tau_{xy} = \frac{Q(x) S_z(y)}{I_z b}, \quad \sigma_y \equiv 0. \quad (8.1)$$

Dla belki pokazanej na Rys. 8.1b mamy:

$$M(x) = -Px - q \frac{x^2}{2}, \quad Q(x) = -P - qx, \quad (8.2)$$

$$b = 1, \quad h = 2c, \quad I_z \equiv I = \frac{h^3}{12} = \frac{2}{3}c^3, \quad S_z = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{1}{2}(c^2 - y^2). \quad (8.3)$$

Po podstawieniu (8.2) i (8.3) do (8.1) otrzymujemy zależności, które wynikają z pól momentów zginających i sił poprzecznych:

$$\sigma_x = -\frac{1}{2I}(2Px + qx^2)y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{1}{2I}(P + qx)(c^2 - y^2). \quad (8.4)$$

Siła skupiona P jest wypadkową obciążeń brzegowych tarczy wynikających z $Q_0 = Q(x=0)$ i $\tau_{xy}^0 = p_s(x=0)$:

$$P = \int_{-c}^c \tau_{xy}^0 dy = \frac{Q_0}{I_z b} \int_{-c}^c S_z(y) dy = Q_0 \frac{3}{4c^3} \int_{-c}^c (c^2 - y^2) dy = Q_0 \frac{3}{4c^3} \left(c^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-c}^c = Q_0 \frac{3}{4c^3} \frac{4}{3} c^3, \quad (8.5)$$

a więc obciążenie przyłożone do brzegu AB tarczy z Rys. 8.1a i siły P przyłożonej do swobodnego brzegu belki na Rys. 8.1b są statycznie równoważne.

8.1.2. Rozwiązanie równań naprężeniowych TS

Rozwiązanie belkowe wynika z założeń wytrzymałości materiałów, w szczególności z przyjęcia hipotezy Bernoulliego-Eulera, która prowadzi do liniowego rozkładu naprężeń σ_x wzdłuż wysokości belki i pomijania nacisku włókien, tj. $\sigma_y \equiv 0$. W dalszym ciągu zajmujemy się obliczaniem naprężeń w tarczy, przyjmując, że $\sigma_y \neq 0$.

Dalej korzystamy z równań naprężeniowych PSN (7.3) i (7.18), które dla zerowych wartości sił masowych $X = Y \equiv 0$ przyjmują postać:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (8.6)$$

Do tych równań należy dołączyć warunki brzegowe w postaci (7.11), którą niżej przepisujemy:

$$p_{nx} \equiv p_x = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y, \quad p_{ny} \equiv p_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y, \quad (8.7)$$

gdzie dostawy kierunkowe odnosimy do normalnej zewnętrznej dla punktu leżącego na konturze rozpatrywanego obszaru płyty, tj. $n_x = \cos(n, x)$, $n_y = \cos(n, y)$, por. Rys. 7.1b.

Wracamy do analizy tarczy prostokątnej na Rys. 8.1a. Dalej przyjmujemy niezerowe obciążenia zewnętrzne wynikające z tego rysunku, a więc: $p_y(0, y) \sim \tau_{xy}(0, y)$, $p_y(x, -c) = q$, $p_x(l, y) \sim \sigma_x(l, y)$, $p_y(l, y) \sim \tau_{xy}(l, y)$. W tych zależnościach znak \sim oznacza wartości z dokładnością do znaku. Dla kolejnych brzegów obliczamy obciążenia zewnętrzne korzystając z dostaw kierunkowych określanych dla kolejnych boków prostokątnego konturu tarczy, oraz wartości naprężeń $\sigma_x(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$ określanych wzorami belkowymi (8.4). Tylko wartości naprężeń

brzegowych $\sigma_y(x, y)$ określamy z zewnętrznych obciążeń tarczy. Dla kolejnych brzegów mamy:

brzeg A-B (0, y): $n_x = -1, n_y = 0, p_n \equiv p_{nx} = -\sigma_x(0, y) = 0,$

$$p_s \equiv p_{ns} = -\tau_{xy}(0, y) = \frac{P}{2I}(c^2 - y^2),$$

brzeg B-C (x, -c): $p_n \equiv p_{nx} = -\sigma_y(x, -c) = -q, \quad p_s \equiv p_{ns} = -\tau_{xy}(x, -c) = 0,$

(8.8)

brzeg C-D (l, y): $p_n \equiv \sigma_x = -\frac{1}{2I}(2Pl + ql^2)y, \quad p_s \equiv p_{ns} = \tau_{xy}(l, y) = -\frac{P}{2I}(c^2 - y^2),$

brzeg D-A (x, c): $p_n \equiv p_{nx} = \sigma_y(x, c) = 0, \quad p_s \equiv p_{ns} = \tau_{xy}(x, c) = 0 .$

Pierwsze równanie równowagi (8.6)₁ jest spełnione przez naprężenia σ_y i τ_{xy} określone wzorami belkowymi (8.4), tzn.:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2I}(2Px + qx^2)y \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{1}{2I}(P + qx)(c^2 - y^2) \right] =$$

$$-\frac{1}{2I}(2P + 2qx)y + \frac{1}{2I}(P + qx)2y = 0 .$$

Nie oznacza to, że wzór belkowy (8.4)₁ na σ_x jest jedynym rozwiązaniem, gdyż równanie równowagi (8.6)₁ jest spełnione również dla rozszerzonego pola naprężeń

$$\sigma_x = -\frac{1}{2I}(2Px + qx^2)y + f_1(y) . \quad (8.9)$$

Z drugiego równania równowagi (8.6)₂ otrzymamy równania różniczkowe

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{q}{2I}(c^2 - y^2) ,$$

którego całką jest funkcja:

$$\sigma_y = \frac{q}{2I}(c^2 y - \frac{y^3}{3}) + f_2(x) . \quad (8.10)$$

Funkcję $f_2(x)$ wyznaczamy z warunków brzegowych (8.8) na brzegach B-C i A-D, tj. dla $(x, y = \pm c)$:

$$\sigma_y(x, -c) = \frac{q}{2I}(-c^3 + \frac{c^3}{3}) + f_2(x) = -q , \quad (8.11)$$

$$\sigma_y(x, c) = \frac{q}{2I}(c^3 - \frac{c^3}{3}) + f_2(x) = 0 .$$

Dodając stronami równania (8.11) otrzymujemy:

$$2f_2(x) = -q \rightarrow f_2(x) = -\frac{q}{2}. \quad (8.12)$$

i pole naprężeń σ_y :

$$\sigma_y(x, c) = \frac{q}{2I}(c^2 y - \frac{y^3}{3}) - \frac{q}{2}, \quad (8.13)$$

które jest niezależne od x i ma rozkład wzdłuż y określone parabolą trzeciego stopnia, Rys. 8.1a.

Funkcję $f_1(y)$ obliczamy z trzeciego równania zgodności odkształceń (8.6)₃. W tym celu obliczamy pochodne dla funkcji (8.9) i (8.13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} &= -\frac{q}{I} y, & \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} &= \frac{d^2 f_1}{dy^2}, \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} &= -\frac{q}{I} y, \end{aligned}$$

i podstawiamy je do równania (8.6)₃. Z tego równania wynika równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2 f_1}{dy^2} = \frac{2q}{I} y. \quad (8.14)$$

Całką równania (8.14) jest funkcja:

$$f_1(y) = \frac{q}{3I} y^3 + C_1 y + C_2. \quad (8.15)$$

Tak więc pole naprężeń $\sigma_x(x, y)$ opisuje funkcja

$$\sigma_x = -\frac{1}{2I}(2Px + qx^2)y + \frac{q}{3I}y^3 + C_1y + C_2. \quad (8.16)$$

Ze wzoru (8.16) wynika, że na brzegu A-B, tj. dla $x = 0$ wystąpi naprężenie

$$\sigma_x(0, y) = \frac{q}{3I}y^3 + C_1y + C_2, \quad (8.17)$$

naruszające warunek brzegowy (8.8)₁, tj. $p_n(y) = \sigma_x(0, y) = 0$. Jeżeli jednak naprężenia σ_x na lewym brzegu tarczy będą samo-zrównoważone, to zgodnie z zasadą Saint-Venanta nie będą one miały wpływu na pole naprężeń w niewielkim oddaleniu od brzegu.

Warunki samo-zrównoważenia piszemy w postaci całkowitej, która ma interpretację zerowania belkowej siły podłużnej i momentu zginania na brzegu A-B tarczy pokazanej na Rys. 8.1a:

$$\int_{-c}^c \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-c}^c \sigma_x y dy = 0. \quad (8.18)$$

Po podstawieniu naprężenia (8.16) otrzymujemy dwa równania:

8

$$2c C_2 = 0, \quad \frac{2q}{15I} c^2 + \frac{2}{3} C_1 = 0,$$

skąd obliczamy:

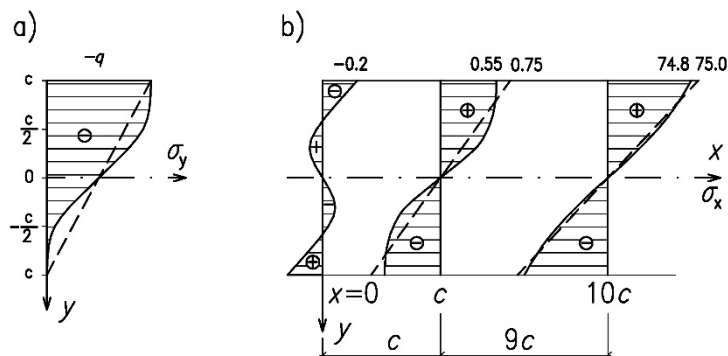
$$C_1 = -\frac{q}{5I} c^2, \quad C_2 = 0. \quad (8.19)$$

Ostatecznie otrzymujemy wzory:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{2I} (2Px + qx^2) y + \frac{q}{2I} \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) = \\ &= -\frac{3}{4c^3} (2Px + qx^2) y + \frac{3}{4c^3} q \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right), \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2I} \left(c^2 y - \frac{y^3}{3} \right) - \frac{q}{2} = -\frac{q}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{y}{c} + \frac{1}{2} \frac{y^3}{c^3} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{2I} (P + qx)(c^2 - y^2) = -\frac{3}{4c} (P + qx) \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Na Rys. 8.2 pokazano rozkłady naprężeń σ_x i σ_y dla $P = 0$, $q = 1$, $I = (2/3)c^3$. Jak wynika ze wzoru (8.20)₂ pole naprężeń $\sigma_y(x, y)$ jest określony parabola stopnia 3-ciego i jest niezależne od zmiennej x . Dla każdego punktu x (przekroju poprzecznego belki) rozkład naprężeń $\sigma_y(y)$ jest taki jak na Rys. 8.2a.

Pole naprężeń σ_x zależy istotnie od pierwszego, „belkowego” członu we wzorze (8.20)₁. Wpływ 2-go członu, niezależnego od x , ma charakter naprężenia samo-zrównoważonego wzdłuż osi y i przy wzroście x jest relatywnie coraz mniejszy. W długich tarczach rozkład naprężeń σ_x przybliża się do linii prostej, która odpowiada rozkładowi „belkowemu”.



Rys. 8.2: a) Rozkład naprężenia σ_y wzdłuż wysokości tarczy, b) Zmiany rozkładu naprężenia σ_x wzdłuż osi poziomej dla $x = 0, c, 10c$

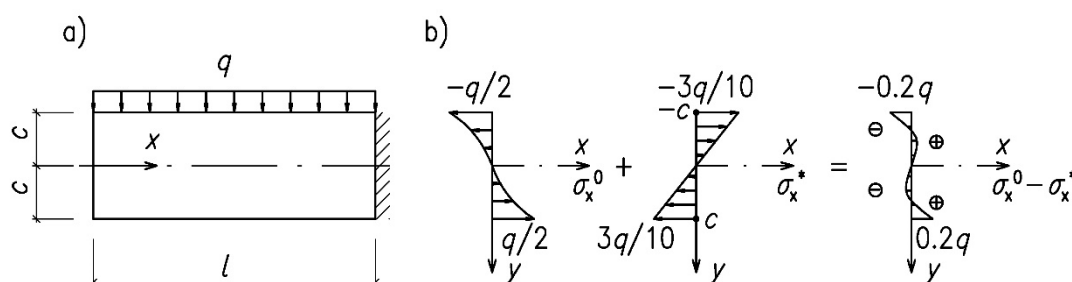
8.1.3. Zastosowanie funkcji naprężeń

8.1.3.1. Zginanie belkowe tarczy wspornikowej dla obciążenia równomiernego przyłożonego do górnego brzegu. Powtórzmy rozwiązywania tarczy prostokątnej przez zastosowanie funkcji naprężeń. Pomijamy obciążenia siłą skupioną, tj. w porównaniu z Rys. 8.1b na Rys. 8.3 przyjmujemy $P = 0$.

Funkcję naprężeń przyjmujemy w postaci:

$$F = a_1 x^2 + a_2 x^2 y + a_3 x^2 y^3 + a_4 y^5, \quad (8.21)$$

gdzie: a_i – współczynniki wyznaczane ze spełnienia odpowiednich równań TS.



Rys. 8.3. a) Tarcza z równomiernie rozłożonym obciążeniem q górnego brzegu, b) Rozkłady naprężeń wzdłuż osi y

Podstawiamy funkcję (8.21) do równania nierozdzielności (7.27) przyjmując $X = Y = 0$:

$$\nabla^2 \nabla^2 F \equiv \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (8.22)$$

W tym celu obliczamy pochodne:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 120 a_4 y, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = 12 a_3 y \quad (8.23)$$

i podstawiamy je do równań (8.22). Otrzymuje równanie, z którego obliczamy wartość parametru a_4 :

$$(24 a_3 + 120 a_4) y = 0 \rightarrow a_4 = -\frac{1}{5} a_3, \quad (8.24)$$

dzięki czemu funkcja naprężeń przyjmuje postać:

$$F = a_1 x^2 + a_2 x^2 y + a_3 \left(x^2 y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right). \quad (8.21a)$$

Za pomocą wzorów (7.26) obliczamy naprężenia:

$$\sigma_x \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = (6x^2 y - 4y^3) a_3, \quad \sigma_y \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2a_1 + 2y a_2 + 2y^3 a_3, \quad (8.25)$$

$$\tau_{xy} \equiv -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -2x a_2 - 6x y^2 a_3.$$

Naprężenia (8.25) mają spełniać warunki brzegowe na brzegach $y = c$ oraz $y = -c$:

$$\sigma_y(x, -c) = -q, \quad \sigma_y(x, c) = 0, \quad (8.26)$$

$$\tau_{xy}(x, -c) = 0, \quad \tau_{xy}(x, c) = 0.$$

Podstawienie zależności (8.25) do równań (8.26) daje:

$$2a_1 - 2c a_2 - 2c^3 a_3 = -q,$$

$$2a_1 - 2c a_2 + 2c^3 a_3 = 0,$$

$$-2x a_2 - 6x c^2 a_3 = 0,$$

$$-2x a_2 - 6x c^2 a_3 = 0.$$

(8.26a)

Ponieważ równania 3-te i 4-cie są identyczne dlatego do wyznaczania trzech współczynników bierzemy 3 pierwsze równania (8.26a). Stąd otrzymujemy:

$$a_1 = -\frac{q}{4}, \quad a_2 = \frac{3q}{8c}, \quad a_3 = -\frac{q}{8c^3}. \quad (8.27)$$

Po podstawieniu współczynników (8.27) do (8.25) otrzymujemy wzory:

$$\sigma_x = -\frac{q}{4c^3}(3x^2 y - 2y^3), \quad \sigma_y = -q \left(\frac{1}{2} - \frac{3y}{4c} + \frac{1}{4} \frac{y^3}{c^3} \right), \quad \tau_{xy} = -\frac{3qx}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right). \quad (8.28)$$

Sprawdzenie warunków brzegowych na brzegu $x = 0$ wskazuje, że zamiast $\sigma_x(0, y) \equiv 0$ otrzymujemy:

$$\sigma_x^o = \frac{q}{2c^3} y^3. \quad (8.29)$$

Rozkład $\sigma_x^o(y)$ na brzegu $x = 0$, por. Rys. 8.3b, nie jest samo-zrównoważony, gdyż:

$$\int_{-c}^c \sigma_x^o dy = \frac{q}{2c^3} \int y^3 dy = 0, \quad \int_{-c}^c \sigma_x^o y dy = \frac{q}{2c^3} \int_{-c}^c y^4 dy = \frac{1}{5} q c^2. \quad (8.30)$$

Moment zginający $M_0 = (1/5) q c^2$ jest związany z członem $qy^3/(2c^3)$ w naprężeniu $\sigma_x(x, y)$, a więc jest niezależny od zmiennej x . Odpowiada to czystemu zginaniu belkowemu, które wynika z naprężenia

$$\sigma_x^* = \frac{M_0}{I} y = \frac{qc^2}{5} \frac{3}{2c^3} y = \frac{3q}{10c} y. \quad (8.31)$$

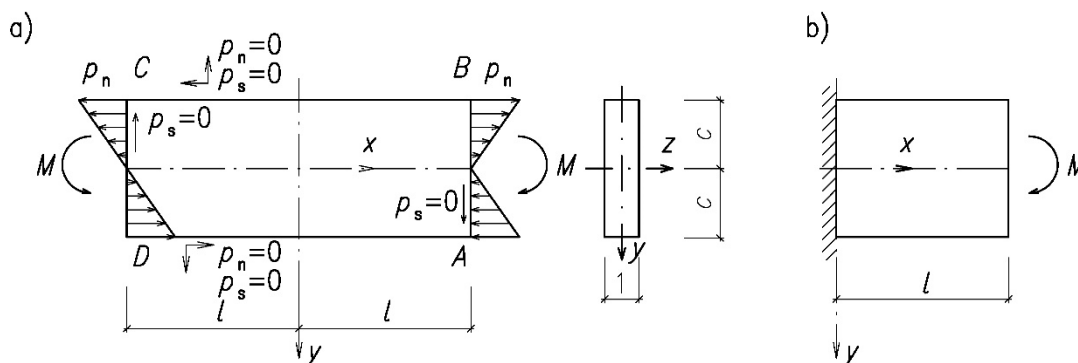
Z tego wynika, że celem spełnienia osłabionych warunków brzegowych na brzegu swobodnym, tj. dla $x = 0$, należy do tego brzegu przyłożyć moment $-M_0$, a więc poprawić wzór (8.28)₁ na naprężenia $\sigma_x(x, y)$ przez dodanie członu (8.31) o przeciwnym znaku. Dochodzimy w ten sposób do wzoru

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{3q}{4c^3} \left[x^2 y - \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) \right]. \quad (8.32)$$

Na Rys. 8.2b pokazano rozkłady naprężeń wzdłuż osi y . Różnica naprężeń $\sigma_x^0 - \sigma_x^*$ jest ujęta w nawiasy półokrągłe we wzorze (8.32). Zarówno ten wzór, jak też wzory (8.28)_{2,3}, odpowiadają w pełni wzorom (8.20), wyprowadzonym przez całkowanie równań naprężeniowych TS.

8.2. Czyste zginanie belkowe tarczy prostokątnej

Rozpatrujemy tarczę pokazaną na Rys. 8.4 przy założeniach jak w p. 8.1, tzn. pomijamy siły masowe i obciążenie przykładamy jedynie do boków równoległych do osi y (przyjęcie początku układu współrzędnych w środku tarczy określa położenie tych boków jako $x = \pm l$).



8.4. a) Czyste zginanie tarczy prostokątnej,
b) Tarcza wspornikowa jako połowa tarczy na Rys. 8.3a,
utwierdzona wzdłuż brzegu $x = 0$

Przyjmujemy funkcję naprężeń w postaci sumy wyrazów stopnia 3-ciego

$$F(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3. \quad (8.33)$$

Przyjęta funkcja naprężeń spełnia tożsamościowo równanie biharmoniczne, gdyż jej czwarte pochodne są równe 0, a więc

$$\nabla^2 \nabla^2 F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \equiv 0. \quad (8.34)$$

Naprężenia PSN określają wzory:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2cx + 6dy, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6ax + 2by, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -2bx - 2cy. \quad (8.35)$$

Dla brzegów odpowiadających liniom konturu tarczy mamy następujące warunki brzegowe:

$$\text{brzegi A-B i C-D, } x = \pm l: p_n = \sigma_x, p_s = \tau_{xy}, \quad (8.36)$$

$$\text{brzegi D-A i B-C, } y = \pm c: p_n = \sigma_y, p_s = \tau_{yx}.$$

Z warunków brzegowych dla brzegów D-A i B-C wynikają stałe:

$$a = b = c = 0. \quad (8.37)$$

Jedynie niejednorodne warunki brzegowe są dla obciążeń brzegów A-B i C-D o współrzędnych $(x = \pm l, y)$:

$$p_n = \sigma_x = 6dy \rightarrow d \leq 0. \quad (8.38)$$

Nierówność dla obliczania d wynika z Rys. 8.3a, gdyż dla $y \leq 0$ ma być $\sigma \geq 0$. Aby obliczyć stałą d posłużymy się analogią belkowa. W tym celu obliczamy wielkości całkowe, które odpowiadają polom siły podłużnej $N(x)$ i momentowi zginającemu $M(x)$:

$$N(x) = \int_{-c}^c \sigma_x dy = 6d \int_{-c}^c y dy = 0, \quad (8.39)$$

$$M(x) = \int_{-c}^c \sigma_x y dy = 6d \int_{-c}^c y^2 dx \equiv 6d I_z = -M. \quad (8.40)$$

Zależność (8.39) oznacza zerowanie się pola sił podłużnych, a więc odpowiada stanowi czystego zginaniu belki. Z równania (8.40) obliczamy wartość stałej d :

$$d = -\frac{M}{6I_z}. \quad (8.41)$$

Podstawienie (8.41) do (8.38) daje wzór WM na naprężenia normalne od zginania, odpowiadający zwrotowi osi y na Rys. 8.4a:

$$\sigma_x = -\frac{M}{I_z} y. \quad (8.42)$$

Dla wysokości tarczy $h = 2c$ i grubości $b = 1$ do (8.42)₁ możemy podstawić moment bezwładności

$$I_z \equiv I = \frac{2}{3}c^3. \quad (8.43)$$

Rozkład naprężenia $\sigma_x(x, y)$ odpowiada jednoosiowemu stanowi naprężenia, gdyż zgodnie z (8.35) i (8.37) zerują się pozostałe naprężenia:

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0. \quad (8.44)$$

Naprężenie normalne σ_x , określone wzorem (8.42) jest niezależne od zmiennej x i, zgodnie z (8.42), jest liniowo zmienne wzdłuż osi y . Korzystamy z tej zależności celem obliczenia pól przemieszczeń $u(x, y)$ i $v(x, y)$ za pomocą z równań geometrycznych i fizycznych:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{M}{I}y, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = \nu \frac{M}{I}y. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Całkujemy równania (8.45):

$$\begin{aligned} u = -\frac{M}{I}y \int dx + f_1(y) = -\frac{M}{I_z}xy + f_1(y), \\ v = \frac{\nu M}{I} \int y dy + f_2(x) = \frac{\nu M}{2I}y^2 + f_2(y). \end{aligned} \quad (8.46)$$

Nieznane funkcje $f_1(x)$ i $f_2(y)$ obliczamy z równania nierozdzielności (8.34), z którego wynika zerowanie się odkształceń postaciowych:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (8.47)$$

Podstawienie (8.46) do (8.47) daje równanie

$$-\frac{M}{EI}x + \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} = 0,$$

z którego, przez porównanie odpowiednich wyrazów, wynikają następujące związki:

$$\frac{\partial f_2(x)}{\partial x} = \frac{M}{EI}x, \quad \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} = 0. \quad (8.48)$$

Całkowanie równań (8.48) prowadzi do zależności:

$$f_2(x) = \frac{M}{EI}x^2 + C, \quad f_1(y) = D, \quad (8.49)$$

co daje wzory (8.46) w postaci:

$$u = -\frac{M}{EI}xy + D, \quad v = \frac{M}{2EI}(x^2 + \nu y^2) + C. \quad (8.50)$$

Przyjmijmy, że tarcza jest unieruchomiona w początku układu na Rys. 8.4a, tj. zachodzi

$$u(x=0, y=0) = 0, \quad v(x=0, y=0) = 0 \rightarrow C = D = 0, \quad (8.51)$$

i w ten sposób otrzymujemy wzory na pola przemieszczeń:

$$u = -\frac{M}{EI_z}xy, \quad v = \frac{M}{EI}(x^2 + \nu y^2). \quad (8.52)$$

Należy dodać, że ze względu na symetrię tarczy i obciążenia można rozpatrywać tylko połowę tarczy z utwierdzonym konturem $x = 0$. Będzie to, mówiąc dokładniej przesuwne utwierdzenie, gdyż z (8.52) otrzymujemy:

$$u(0, y) = 0, \quad v(0, y) = \frac{\nu M}{EI}y^2. \quad (8.53)$$

Przechodząc do modelu belki ograniczamy rozważania do jej osi i dla $y = 0$ otrzymujemy równanie nierozciągliwej linii ugięcia okręgu koła:

$$u \equiv 0, \quad v = \frac{M}{EI}. \quad (8.54)$$

8.3 Metoda odwrotna w rozwiązywaniu PSN

Metoda odwrotna polega na:

1. Założeniu pewnej funkcji naprężeń lub wprost pewnego stanu naprężenia
2. Poszukiwaniu obciążeń wywołujących ten stan

W omawianym punkcie zastosujemy ją do funkcji Airye'go, którą zakładamy w postaci wielomianu: np. $F(x,y)=A(x^3+xy^2)$.

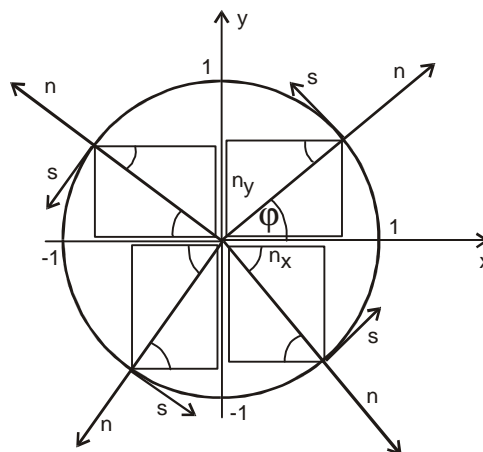
Współrzędne tensora naprężeń dla zadanej funkcji Aire'go $F(x,y)$ w przypadku braku sił masowych są równe:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (8.55)$$

Ogólne wzory na warunki brzegowe dla zadanych wartości obciążenia normalnego i stycznego zgodnie z rysunkiem 8.5 wynoszą:

$$p_{nx} = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \quad (8.56)$$

$$p_{ny} = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y$$



Rys.8.5

Wykorzystując wzory na współrzędne normalnej i stycznej do konturu zgodnie z rysunkiem 8.5:

$$n_x = \cos(n, x) = \cos \varphi \quad (8.57)$$

$$n_y = \cos(n, y) = \sin \varphi$$

otrzymujemy ogólne wzory na warunki brzegowe dla zadanych wartości obciążenia normalnego p_{nn}

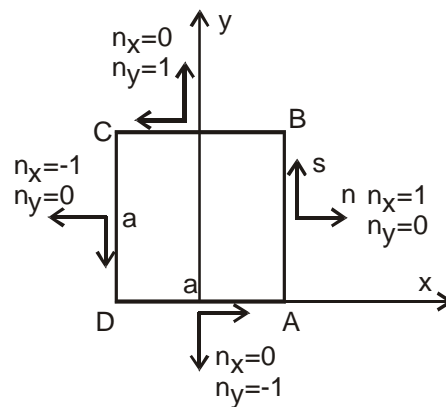
$$p_{nn} = p_{nx}n_x + p_{ny}n_y = \sigma_x n_x^2 + 2\tau_{xy}n_x n_y + \sigma_y n_y^2$$

i stycznego p_{ns} do konturu obszaru

$$p_{ns} = p_{ny}n_x - p_{nx}n_y = (\sigma_y - \sigma_x)n_x n_y + \tau_{xy}(n_x^2 - n_y^2) \quad (8.58)$$

Przykład

Jak należy obciążyć tarcze (Rys.8.6), aby biharmoniczna funkcja $F(x,y)=A(x^3+y^2x)$ była dla niej funkcją naprężeń Aire'go.



Rys.8.6

Składowe tensora naprężeń wg. wzorów 8.55 wynoszą

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2Ax$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6Ax$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -2Ay$$

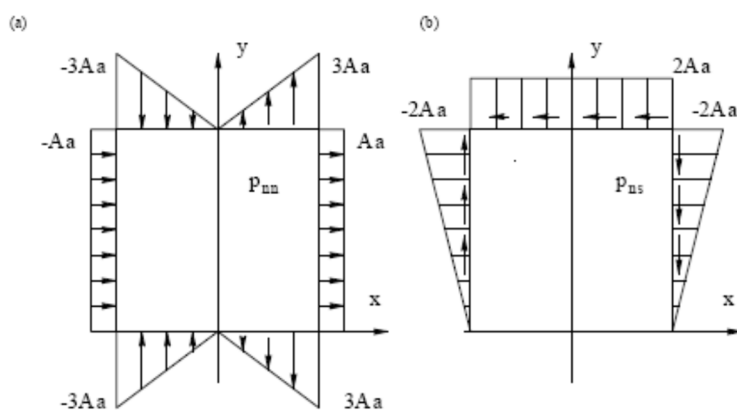
Odpowiednio wg. wzorów 8.58 obciążenie normalne i styczne na poszczególnych krawędziach tarczy jest równe:

Krawędź A-B $p_{nn} = \sigma_x = 2A \frac{a}{2} = Aa$, $p_{ns} = -2Ay$

B-C $p_{nn} = \sigma_y = 6Ax$, $p_{ns} = 2Aa$

C-D $p_{nn} = -2A \frac{a}{2} = -Aa$, $p_{ns} = -2Ay$

D-A $p_{nn} = \sigma_y = 6Ax$, $p_{ns} = 2A \times 0 = 0$



Rys.3.5