

Wykład TSP Rozdz 1 1. Wprowadzenie

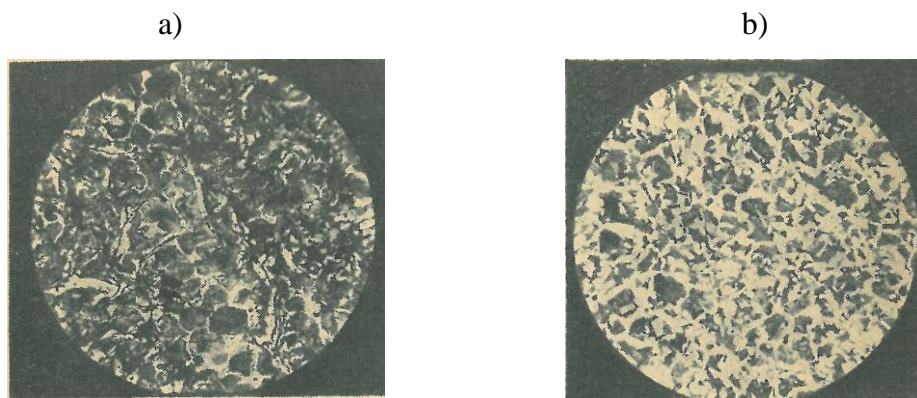
1.1. Relacja teorii sprężystości i plastyczności z innymi działami mechaniki

Teoria sprężystości i plastyczności (TSP) jest działem mechaniki ciał stałych odkształcalnych, która jest rozszerzeniem klasycznej mechaniki analitycznej (nazywanej też mechaniką teoretyczną lub ogólną).

Mechanika analityczna zajmuje się ruchem materii modelowanej jako punkty materialne, ciało nieodkształcalne, ciecze i gaz idealny. Tak więc podstawowym atrybutem mechaniki analitycznej jest *ruch*.

Mechanika ciał odkształcalnych zajmuje się *odkształcalnością materiału*, która towarzyszy nawet małemu ruchowi, bliskiemu stanowi spoczynku lub drganiom ciała stałego przy relatywnie małych amplitudach przemieszczeń (w porównaniu z wymiarami ciała).

Podstawową hipotezą klasycznej teorii ciał odkształcalnych jest *continuum materialne*, stąd nazwa ośrodka ciągłego (C). Ośrodek C jest modelem ciągłym, w którym właściwości mikrostruktury (wynikające z różnych poziomów budowy materii, od poziomu *nano*, atomowego i molekularnego, do poziomu *mikro*, tj. kruszywa w betonie lub cząstek stopów metali, por. Rys.1.1 zaczerpnięty z [2]) są zastępowane właściwościami „rozmazanymi”. Dla przykładu każdy punkt materialny ośrodka C oprócz masy, ma właściwości związane z odkształcalnością. Do opisu ruchu i odkształcalności takiego ośrodka możemy stosować klasyczny aparat analizy matematycznej.



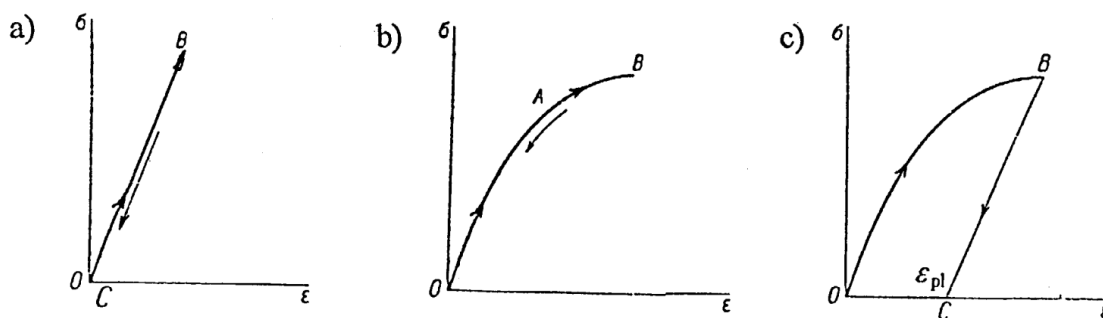
Rys.1.1: Mikrostruktura: a) stali i b) żeliwa (powiększenie 150-krotne, por. [2])

Teoria sprężystości (TS) bada działanie uogólnionych wymuszeń (siły i przemieszczenia wybranych punktów lub obszarów ciała stałego) na ciała wykonane z materiałów sprężystych i określa powstałe przy tym naprężenia i odkształcenia w punktach C w stanach równowagi statycznej lub drganiach.

Klasyczna TS zajmuje się materiałami liniowo sprężystymi (model materiału Hooke’a, por. Rys. 1.2a) oraz ciałem C o liniowych zależnościach między polami obciążeń i wywołanymi przez nie polami przemieszczeń, naprężeń i odkształceń. Jeśli materiał będzie nieliniowo sprężysty, Rys. 1.2b) lub nie będą zachodziły liniowe zależności między wymienionymi polami to musimy do analizy ciała C stosować *nieliniową TS*.

Jeśli materiał ma właściwości plastyczne (na Rys.1.2c pokazało trwałe odkształcenia ϵ_{pl} , pozostające po odciążeniu wzdłuż ścieżki obciążeń B-C) to do analizy przemieszczeń i odkształceń ciała C posługujemy się *teorią plastyczności (TP)*. W klasycznej TP tylko model materiału jest nieliniowy, natomiast pozostałe równania ciała C pozostają liniowe.

Dalej będziemy zajmowali się tylko klasyczną teorią sprężystości i plastyczności i dla uproszczenia posługujemy się nazwą *teoria sprężystości i plastyczności (TSP)*.



Rys.1.2. Wykresy rozciągania jednoosiowego dla materiału:
a) liniowo sprężystego (prawo Hooke'a), b) nieliniowo sprężystego, c) plastycznego

1.2. Podstawowe hipotezy i założenia TSP

Wyżej zdefiniowana TSP opiera się na następujących hipotezach (por. np. [2]).

1) Przyjmujemy *continuum materialne* (ośrodek C) wykonane z materiału liniowo sprężystego lub o prostych modelach materiału klasycznej TP. W szczególności będziemy zajmowali się materiałami jednorodnymi i izotropowymi, a więc materiałami o dwóch stałych materiałowych, np. module Younga E i współczynnika Poissona ν .

2) Oprócz klasycznych modeli materiału stosujemy liniowe modele matematyczne (równania) ośrodka C;

3) Obowiązuje *hipoteza o materialnie nienaprzężonym stanie ciała*, tzn. przy braku obciążeń stan wyjściowy ciała C jest beznaprzężeniowy. W TS przyjmujemy, że po całkowitym odciążeniu wracamy do stanu beznaprzężeniowego;

4) Przyjmujemy, że *uogólnione przemieszczenia i odkształcenia* ciała C są *małe* tak, że możemy posługiwać się liniowymi równaniami równowagi i liniowymi zależnościami między polami przemieszczeń i odkształceń (por. wyżej podane założenie 3);

5) Nasz przedmiot dotyczy głównie *statyki* ciała C, tzn. będziemy w naszych równaniach pomijali siły bezwładności lub energię kinetyczną, a tylko w małym zakresie będziemy mówili o wpływie czasu na przemieszczenia i odkształcenia;

6) Do analizy tak zawężonych modeli matematycznych stosujemy metody fizyki matematycznej – głównie *metody analityczne*. Otrzymanie rozwiązań okazuje się na ogół trudne, często niemożliwe do uzyskania w zamkniętej postaci.

Z tego powodu dla potrzeb inżynierskich wprowadza się *różne uproszczenia* w modelach TSP. Dotyczy to przede wszystkim celowego zmniejszenia liczby zmiennych niezależnych (przechodzenie od modeli 3D, tj. trójwymiarowych do modeli 2D i 1D) i stosowanie różnych hipotez (np. wprowadzanie sztucznych więzów wewnętrznych), związanych z kształtem lub stosunkiem wymiarów elementów albo też części konstrukcji inżynierskich. W ten sposób powstała *wytrzymałość materiałów* (WM).

1.3. Teoria sprężystości i plastyczności (TSP) a wytrzymałość materiałów (WM)

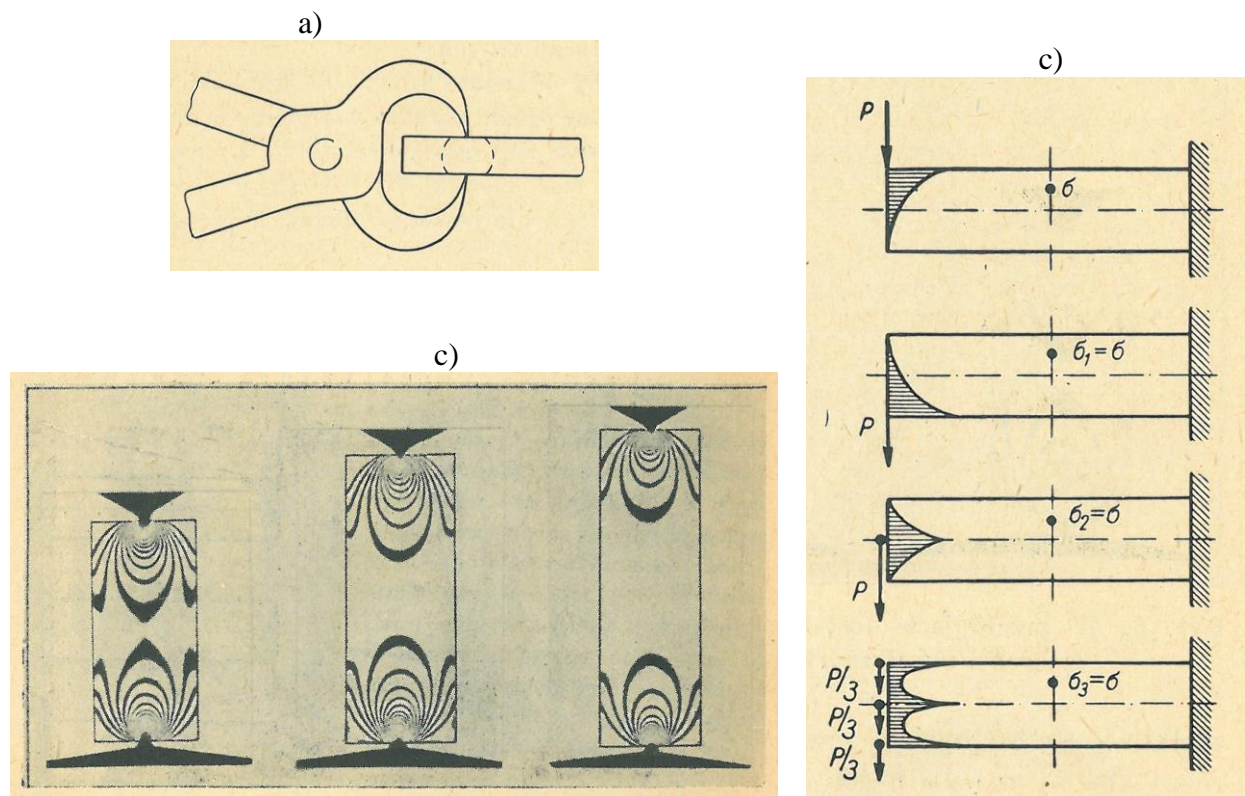
WM i TSP różnią się zarówno modelami matematycznymi jak też metodami ich analizy. WM powstała w wyniku rozwoju potrzeb inżynierskich, wymagających efektywnych modeli i

metod obliczeniowych. Można to często osiągnąć kosztem uproszczenia modeli TSP i zastosowania metod przybliżonych, dających małe błędy, akceptowane przez inżynierów.

W TSP stosujemy modele i metody fizyki matematycznej, opierając się na doświadczalnie stwierdzonych prawach. W przypadku WM wprowadzamy dodatkowe hipotezy, które powodują zgodność z doświadczeniami na modelach materialnych tylko w ograniczonym, ale też w zakresie satysfakcjonującym inżynierów.

Klasycznym przykładem ilustrującym różnice podejść TSP i WM jest stosowanie hipotezy Bernoulliego-Eulera do analizy zginania belek smukłych. Przeniesienie tych hipotez do tarcz (belki – ściany) daje wyniki dalece odbiegające od rozwiązań TSP, które opierają się na modelach bez więzów wewnętrznych, przyjmowanych w hipotezach B-E, por. Rys.1.2 (ten i dalsze przykłady zaczerpnięto z [2]).

Dalszym przykładem może być powszechne stosowanie w WM zasada Saint-Venanta, która mówi: w punktach ciała C dostatecznie oddalonych od miejsca przyłożenia obciążeń zewnętrznych naprężenia prawie nie zależą od sposobu przyłożenia tych obciążeń. Na Rys. 1.3a pokazano przykłady uzasadniające stosowanie zasady S-V w pewnej odległości od punktów przyłożenia obciążeń. Na Rys. 1.3b widać, że w odległości punktu przyłożenia siły P , równej w przybliżeniu wysokości przekroju naprężenia kontaktowe zanikają – niezależnie od tego w jakiej odległości od osi pręta jest siła przyłożona.

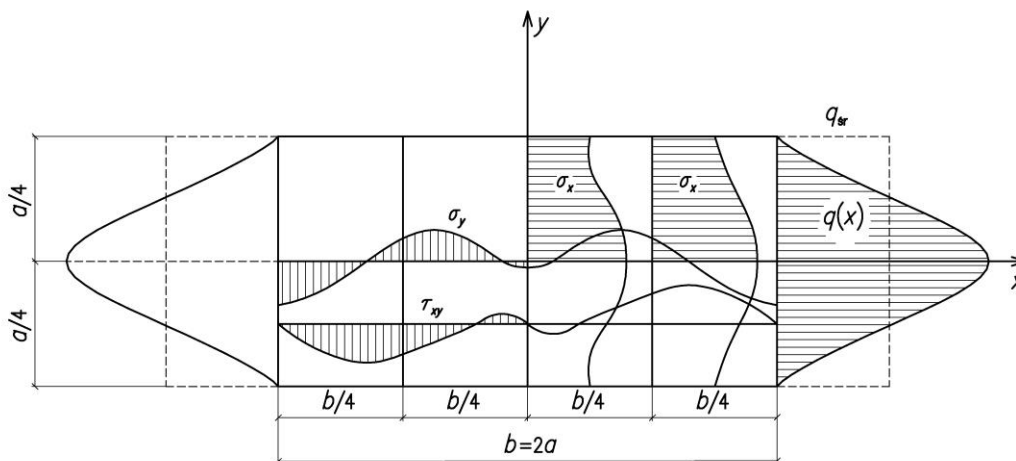


Rys.1.3: Zjawisko Saint-Venanta w otoczeniu przyłożenia sił skupionych, a) przecinanie pręta, b) siła skupiona na końcu wspornika, c) ściskanie tarczy prostokątnej

Zasada S-V miała często tylko doświadczalne uzasadnienie, por. badania elastoptyczne pokazane na Rys. 1. 3c. Widać, że trajektorie rozkładu tzw. izochrom, uzyskanych metodą elastoptyczną koncentrują się na wysokości tarczy równej w przybliżeniu jej szerokości. Między

punktami przyłożenia sił izochrom znikają przy równomiernym rozkładzie naprężeń ściskających. Taki obszar naprężeń ściskających powiększa się przy wzroście wysokości tarczy.

Zjawisko SD-V potwierdzają również obliczenia analityczne i numeryczne. Na Rys. 1.4 pokazano rozkład naprężeń w tarczy prostokątnej o szerokości a i wysokości $b = 2a$. Widać, że naprężenia ściskające σ_y zbliżają się do rozkładu równomiernego, a moduły naprężeń $|\sigma_x|$ i $|\tau_{xy}|$ są znacznie mniejsze od $|\sigma_y|$



Rys.1.4. Analitycznie obliczone rozkłady naprężeń w tarczy

1.4. Z historii WM i TSP

Należy podkreślić, że historycznie rzecz biorąc, WM powstała wcześniej niż TSP (pierwsze doświadczenia Galileusza zostały wykonane w XVII wieku nad zginaniem belki). W dalszym rozwoju TSP potrzeby inżynierskie „wymuszały” przechodzenie do WM i powstawanie mechaniki konstrukcji (druga połowa wieku XIX), por. [12]. Odnosi się to również do przybliżonych metod numerycznych, opartych głównie na algebrze a nie na analizie matematycznej. Istotnym czynnikiem zewnętrznym okazały się narzędzia obliczeniowe, zwłaszcza pojawienie się komputerów i komputerowych metod obliczeniowych w drugiej połowie XX wieku, por.[24].

Już w wieku XIX pojawiło się pytanie o relacjach między WM i TSP oraz potrzebach ich nauczania. TSP daje rozwiązania oparte na poprawnych (wewnętrznie niesprzecznych) modelach i ścisłych metodach analitycznych. WM jest oparta często na nieścisłych modelach i przybliżonych metodach analizy. Stąd weryfikacja modeli i metod ich analizy, stosowanych w WM jest możliwa dzięki modelom i metodom TSP, które dają pewność poprawności rozwiązań WM w sensie określenia zakresu ich obowiązywania, z błędem dopuszczalnym przez inżynierów.

Istotnym obszarem zastosowania WM jest *mechanika prętów zwartych i cienkościennych* (na ogół zagadnienia 1D w odniesieniu do idealizacji na poziomie ciała C i 2D na poziomie materiału). Układami prętowymi i ustrojami powierzchniowymi zajmuje się mechanika konstrukcji, korzystając z modeli WM. *Problemy*, w których nie możemy odejść od *modeli 3D* (konstrukcje bryłowe, skały, grunty, problemy kontaktowe) są obszarem stosowania modeli i metod obliczeniowych TSP.

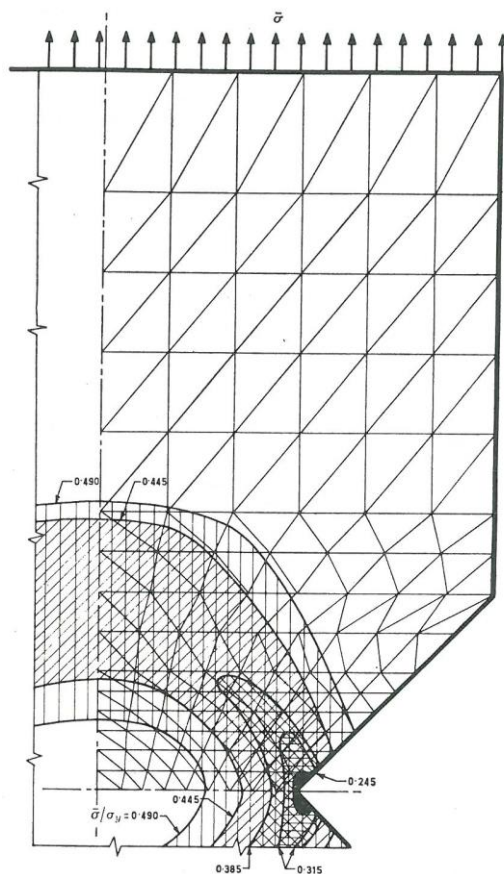
1.5. Metoda Elementów Skończonych

W tym miejscu należy wspomnieć o nowych relacjach między WM, TSP i metodami komputerowymi. W połowie wieku XX pojawiła się metoda elementów skończonych Polega ona

na podziale konstrukcji lub obszarów ośrodków C na podobszary nazywane elementami skończonymi (ES). W obszarze ES można stosować różne metody przybliżone do aproksymacji pól mechanicznych. Można też wykorzystywać klasyczną, liniową TSP. Dzięki temu, na bazie rozwoju komputerów i ich oprogramowania, pojawiły się też możliwości analizy problemów, które daleko wyszły poza metody klasycznej TSP.

MES była rozwijana równolegle w USA, Niemczech i Wielkiej Brytanii. MES okazała się być metoda uniwersalną i znalazła zastosowania zarówno w inżynierii jak też w matematycznej teorii aproksymacji. Dla nas olbrzymią satysfakcją jest to, że jednym z głównych autorów MES był nasz rodak Profesor Olgierd Cecyl Zienkiewicz. Z Jego książki [13] (częściowo opublikowanej w języku polskim, por. [14]) zacerpnęliśmy przykład ilustrowany przez Rys. 1.5. Rozpatrzono tylko jedną ćwiartkę tarczy ze względu na podwójną symetrię jej obszaru tarczy.

Przykład, pokazany na Rys. 1.5 dotyczy zastosowania MES do analizy pola przemieszczeń i naprężeń w tarczy prostokątnej z załamanymi brzegami. Pokazano siatkę elementów skończonych, zagęszczoną w obszarach koncentracji pola naprężeń. Przyjęto, że tarcza jest wykonana z materiału niesprężystego (dokładniej materiału sprężysto-plastycznego o granicy plastyczności σ_Y). Zwiększaniu zewnętrznych obciążeń o intensywności $\tilde{\sigma}$ towarzyszy rozszerzanie się pola obszaru uplastycznionego, por. linie $\tilde{\sigma} / \sigma_Y$.



Rys. 1.5: Rozwój pól uplastycznienia materiały w rozciąganej tarczy prostokątnej

1.6. Literatura

I. Książki:

1. M.T. Huber, *Teoria sprężystości*, T.I i II, PWN, Warszawa 1954.
- *2. N.I. Biezychow, *Teoria sprężystości i plastyczności*, PWN, Warszawa 1957.
3. W.W. Sokołowski, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1957.
4. S. Timoshenko i J.N. Goodier, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
- *5. W. Krzyś i M. Życzkowski, *Sprężystość i plastyczność – Wybór zadań i przykładów*, PWN, Warszawa 1962.
- *6. *Teoria plastyczności*, Praca zbiorowa pod redakcją W. Olszaka, P. Perzyny i A. Sawczuka, PWN, Warszawa 1965.
- *7. T. Kozłowski, *Zarys teorii sprężystości*, Arkady, Warszawa 1968.
8. W. Nowacki, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
9. S.G. Lechnickij, *Teorija uprugosti anizotropnogo tiela*, Nauka, Moskwa 1977.
10. M. Życzkowski, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa 1973
- *11. *Mechanika budowli – Ujęcie komputerowe*, Praca zbiorowa pod red. Z. Waszczyszyn T.3, Arkady, Warszawa 1995.
12. S.P. Timoshenko, *Historia wytrzymałości materiałów*, Arkady, Warszawa, 1966.
13. O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, 1967.
14. O.C. Zienkiewicz, *Metoda Elementów Skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
- *15. A. Bodnar, *Wytrzymałość materiałów*, wyd. 2, Wyd. Politechniki Krakowskiej, 2004.

II. Wybrane skrypty:

- *21. M. Bieniek, *Wstęp do teorii sprężystości i plastyczności*, PWN, Łódź-Poznań 1955.
22. W. Derski, *Podstawy sprężystości*, PWN Warszawa-Łódź 1964.
- *23. M. Kolczuga, *Podstawy teorii stanu naprężenia i odkształcenia*, Ofic. Wyd. Politechniki Rzeszowskiej, Reszów 1998.
24. G. Rakowski, *Sprężystość-Problemy i rozwiązania, metody analityczne i numeryczne*, Wyd. Polit. Świętokrzyskiej, Kielce 2001; *Suplement*, Wyd. Polit. Święt., Kielce 2003.

* Gwiazdką zaznaczono pozycje, na których oparto głównie treść niniejszych materiałów pomocniczych