

Wykład TSIP Rozdz 3 3. Stan naprężenia (równania statyki)

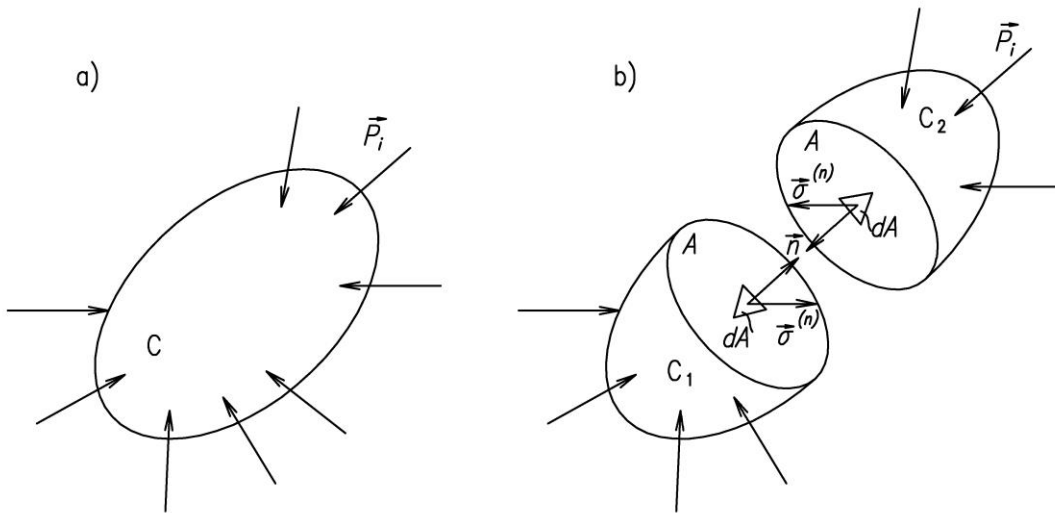
3.1. Tensor naprężenia

Rozpatrujemy model odkształcalnego ciała stałego C (kontinuum materialne) poddanego działaniu następujących obciążeń (por. Rys.3.1):

- 1) siły masowe o intensywności \vec{X} [N/m^3], związane z elementarną objętością dV ,
- 2) siły powierzchniowe o intensywności \vec{p} [N/m^2] dla elementarnej powierzchni brzegu dA

Dzielimy ciało C płaszczyzną przekroju A o normalnej \vec{n} na części C_1 oraz C_2 (Rys.3.1). Na przekrojach pojawiają się wzajemnie zrównoważone siły wewnętrzne \vec{S} o intensywności $\vec{\sigma}^{(n)}$:

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Lambda \vec{S}}{\Delta A} = \frac{d\vec{S}}{dA} \quad (3.1)$$



Rys.3.1: a) Odkształcalne ciało C , na które działają obciążenia \vec{P}_i oraz siły \vec{P}_i ,

b) Podział ciała C przekrojem A , na którym występuje siła wewnętrzna o intensywności $\vec{\sigma}^{(n)}$

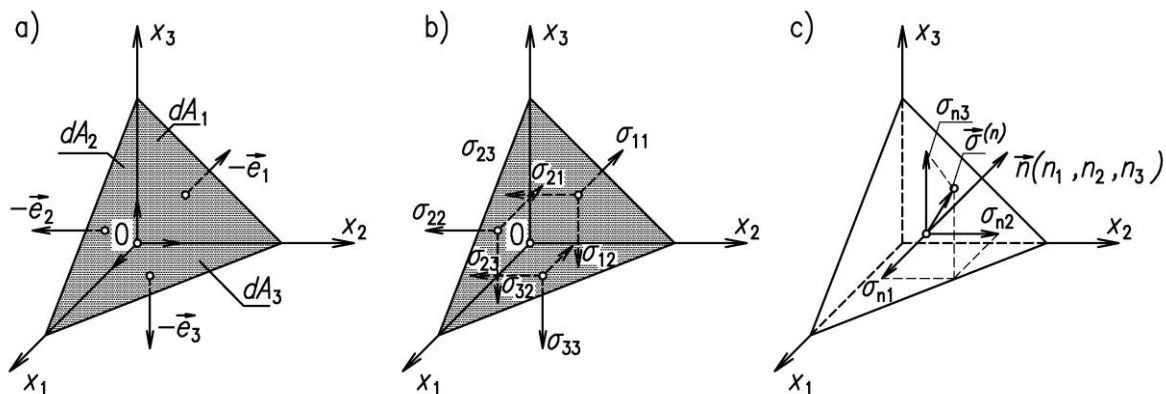
Do przekroju A przylega elementarny czworościan, por. Rys.3.2, który ma ścianki o elementarnych powierzchniach dA oraz dA_i , gdzie $i = 1, 2, 3$ oraz wektorach normalnych \vec{n} i wersorach \vec{e}_i . Elementarne powierzchnie są powiązane zależnościami

$$dA_i = dA \underbrace{\cos(\vec{n}, \vec{e}_i)}_{n_i} = n_i dA. \quad (3.2)$$

Na ścianki elementarnego czworościanu (dalej w skrócie „czworościan”), pokazanego na Rys.2, działają siły wewnętrzne o intensywnościach

$$\vec{\sigma}^{(i)} = \sigma_{ij} \vec{e}_j \quad \text{dla } i, j = 1, 2, 3, \quad (3.3)$$

gdzie: σ_{ij} – współrzędne tensora naprężenia T_σ :



Rys.3.2. Elementarny czworościan: a) Elementarne powierzchnie i normalne do nich, b) Naprężenia na ściankach \$dA_i\$, c) Naprężenia na ściance nachylonej o normalnej \$\vec{n}\$

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Tensor naprężeń \$T_\sigma\$ jest macierzą złożoną z 9-ciu współrzędnych naprężeń \$\sigma_{ij}\$ dla trzech wektorów o intensywności sił wewnętrznych \$\vec{\sigma}^{(i)}\$, działających na ścianach czworościanu o normalnych równoległych do wzajemnie prostopadłych kierunków \$x_1 \perp x_2 \perp x_3\$. Istotną cechą tensora jest to, że podlega on prawu transformacji (2.11) przy obrocie układu współrzędnych \$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1', x_2', x_3')\$.

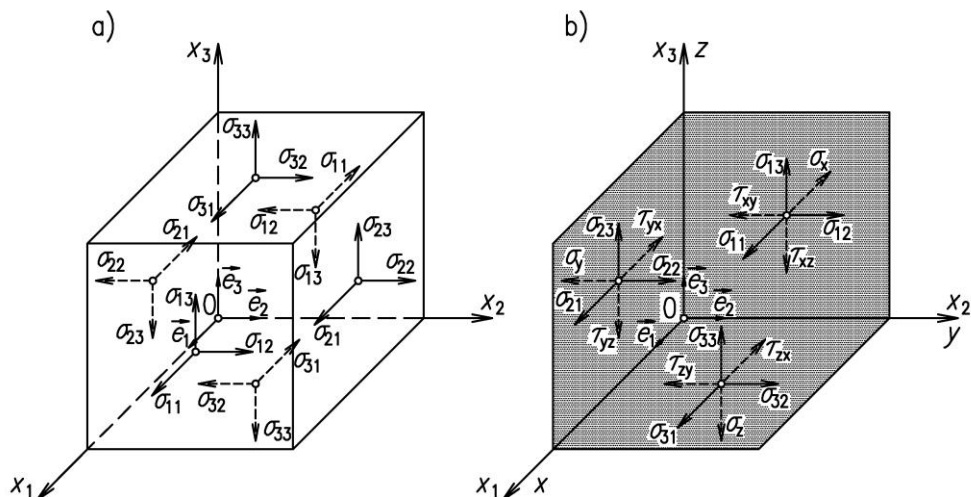
3.2. Kryterium znakowania naprężeń

W otoczeniu punktu 0 budujemy elementarny sześcian o ściankach z normalnymi równoległymi do osi \$(x_1, x_2, x_3)\$, por. Rys. 3.3a. Na ściance o zwrocie normalnej, zgodnym ze zwrotem osi \$x_i\$, dodatnie naprężenia mają zwroty zgodne z osiami układu \$(x_1, x_2, x_3)\$. Dalej naprężenie \$\sigma_{ii}\$, zgodne z normalną \$\vec{n}_i = \vec{e}_i\$, nazywamy *naprężeniem normalnym*, a naprężenia \$\sigma_{ij}\$ dla \$i \neq j\$ nazywamy *naprężeniami stycznymi*. Dodatnie naprężenia na ściankach o normalnych zewnętrznych \$-\vec{e}_i\$ mają zwroty ujemne, przeciwne do wersorów osi \$x, y, z\$ (por. Rys.3.3a).

Uwagi:

1. *Elementarny sześcian* jest konstrukcją abstrakcyjną, tradycyjnie używaną do geometrycznej interpretacji składowych tensora naprężeń \$T_\sigma\$ w punkcie 0 ciała \$C\$. Sześcian przedstawia przekroje poprzeczne „rozsunięte” na odległości dowolnie małe (Rys.3.3a).

2. *Kryterium znakowania* takie jak w WM, tzn. 1-szy wskaźnik odpowiada normalnej zewnętrznej ścianki, na której występuje naprężenie; 2-gi wskaźnik odpowiada osi, do której naprężenie jest równoległe. Na Rys.3.3.b linie ciągłe odpowiadają normalnym zewnętrznym \$\vec{e}_i\$ równoległym do osi układu, a linie przerywane dla normalnych zewnętrznych o wektorze \$-\vec{e}_i\$ o zwrocie przeciwnym do osi \$(x_1, x_2, x_3)\$.



Rys. 3.3 : a) Elementarny sześcian z dodatnimi naprężeniami,
 b) Naprężenia jako intensywności sił wewnętrznych
 na przekrojach o normalnych \vec{e}_i lub $-\vec{e}_i$

3 *Dodatnie naprężenia*: jeśli ścianka ma normalną zewnętrzną o zwrocie zgodnym ze zwrotem osi, układu współrzędnych, to naprężenia są *dodatnie* gdy mają zwroty zgodne ze zwrotami osi układu współrzędnych. Jeśli normalna zewnętrzna ścianki ma zwrot *przeciwny* do zwrotu osi współrzędnych to dodatnie naprężenia mają zwroty przeciwnie do zwrotów osi układu. Na Rys.3.3a wszystkie narysowane naprężenia są dodatnie.

3.3. Notacja inżynierska

Tensorzy wprowadzone w matematyce mają składowe wskaźnikowe, m.in. aby można było otrzymać zwarte wzory oparte na konwencji sumacyjnej. W WM tradycyjnie posługujemy się *notacją inżynierską*, w której wszystkie wzory (równania) są napisane dla kolejnych współrzędnych układu, *bez stosowania konwencji sumacyjnej*. Niżej, w tabelicy (3.5), są porównane obydwie notacje.

Osie układu kartezjańskiego		Wersory osi		Naprężenia w notacji					
				wskaźnikowej			inżynierskiej		
x_1	x	\vec{e}_1	\vec{e}_x	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
x_2	y	\vec{e}_2	\vec{e}_y	σ_{21}	σ_{22}	σ_{23}	τ_{yx}	σ_y	τ_{yz}
x_3	z	\vec{e}_3	\vec{e}_z	σ_{31}	σ_{32}	σ_{33}	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_z

(3.5)

Charakterystyczną cechą notacji inżynierskiej jest stosowanie jednego wskaźnika dla naprężeń normalnych, tzn. $\sigma_{11} \equiv \sigma_x$, $\sigma_{22} \equiv \sigma_y$, $\sigma_{33} \equiv \sigma_z$ i oznaczanie naprężeń stycznych (ścinających) symbolem τ_{ij} , gdzie $i, j = x, y, z$, por. Rys. 3.3b.

Zalety notacji wskaźnikowej i inżynierskiej:

- Notacja wskaźnikowa jest przydatna do prowadzenia dowodów matematycznych i pozwala napisać wzory TS w zwartej (krótkiej) postaci dzięki konwencji sumacyjnej., por. [22].

• Do prowadzenia obliczeń musimy równania (wzory) TS „rozpisać” względem współrzędnych. Notacja inżynierska daje od razu wzory rozpisane. Posługiwanie się wskaźnikami literowymi, np. x, y, z jest powszechnie stosowane przez inżynierów, więc jest dla nich bardziej czytelne (niektórzy też twierdzą, że rzadziej prowadzi do pomyłek edytorskich). Notacja ta jest stosowana na ogół też w starszych podręcznikach TSO, por. [1, 22], a notacja inżynierska jest powszechnie używana w WM, por. [2,4,7,15].

3.4. Równania czworościanu

Wektorowe równania równowagi piszemy dla sił działających na czworościan, a następnie dzielimy je przez dA :

$$\vec{\sigma}^{(n)} dA = \vec{\sigma}^{(i)} dA_i \left| \frac{1}{dA} \right. . \quad (3.6)$$

W ten sposób możemy interpretować dostawy kierunkowe n_i :

$$\frac{dA_i}{dA} = \cos(\angle x_i, \vec{n}) \equiv n_i \quad (3.7)$$

oraz korzystając z (3.6) otrzymujemy zamiast równania wektorowego (3.3) równania równowagi czworościanu w notacji wskaźnikowej:

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j , \quad (3.8.1)$$

Równoważnie w notacji inżynierskiej piszemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} \sigma_{nx} &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z , \\ \sigma_{ny} &= \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z , \\ \sigma_{nz} &= \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z , \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

gdzie występują dostawy kierunkowe (3.7) dla wektora normalnego $\vec{n} (n_x, n_y, n_z)$.

3.5. Równania równowagi sześciangu

Wrócamy do ciała odkształcalnego C poddanego działaniu sił masowych i powierzchniowych, które opisują wektory \vec{X} i $\vec{p}^{(n)}$ (funkcje zmiennych x_i lub wektora \vec{x} , określającego położenie punktu 0), por. Rys.3.4:

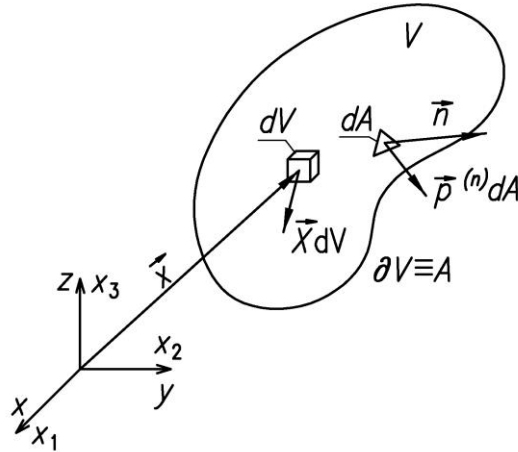
$$\vec{X}(x_1, x_2, x_3) \equiv \vec{X}(\vec{x}) \quad \text{dla } \vec{x} \in V, \quad (3.9.1)$$

$$\vec{p}^{(n)}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}) \quad \text{dla } \vec{x} \in \partial V \equiv A. \quad (3.9.2)$$

Siły masowe i powierzchniowe muszą być w równowadze, tj.:

$$\int_{(V)} \vec{X} dV + \int_{(A)} \vec{p}^{(n)} dA = \vec{0} \quad \text{lub} \quad (3.10.1)$$

$$\int_{(V)} X_i dV + \int_{(A)} p_{ni} dA = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, 3. \quad (3.10.2)$$



Rys.3.4. Ciało odkształcalne C
obciążone siłami masowymi \vec{X} i powierzchniowymi $\vec{p}^{(n)}$

Zgodnie z założeniami continuum materialnego C przyjmujemy, że pod wpływem przyłożonych sił zewnętrznych (obciążenia i reakcje) w ciele C powstają pola sił wewnętrznych, reprezentowane przez pola naprężeń $\sigma_{ij}(\vec{x})$. Zakładamy, że te pola są ciągłe w sensie istnienia pierwszych pochodnych $\sigma_{ij,k}$ tzn.

$$\sigma_{ij,k}(\vec{x}) \in C^{(1)}. \quad (3.11)$$

Dalej przyjmujemy, że elementarny czworościan tak przylega do brzegu, że jego ścianka o normalnej \vec{n} o elementarnej powierzchni dA jest styczna do brzegu ciała. W takim przypadku równania czworościanu możemy napisać w postaci wskaźnikowej:

$$\sigma_{ni} = p_{ni}, \quad (3.12.1)$$

lub w notacji inżynierskiej:

$$\sigma_{nx} = p_x, \quad \sigma_{ny} = p_y, \quad \sigma_{nz} = p_z. \quad (3.12.2)$$

Niżej piszemy równanie czworościanu, najpierw w postaci wskaźnikowej

$$p_{ni} = \sigma_{ij} n_j, \quad (3.13.1)$$

następnie w notacji inżynierskiej

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \\ p_y &= \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z, \\ p_z &= \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z. \end{aligned} \quad (3.13.2)$$

Przyjmujemy dalej, że ciało C, pokazane na Rys.3.4, ma objętość V i jest ograniczone gładką powierzchnią zamkniętą A . Dzięki temu możemy do drugiej całki zastosować twierdzenie Greena-Gaussa:

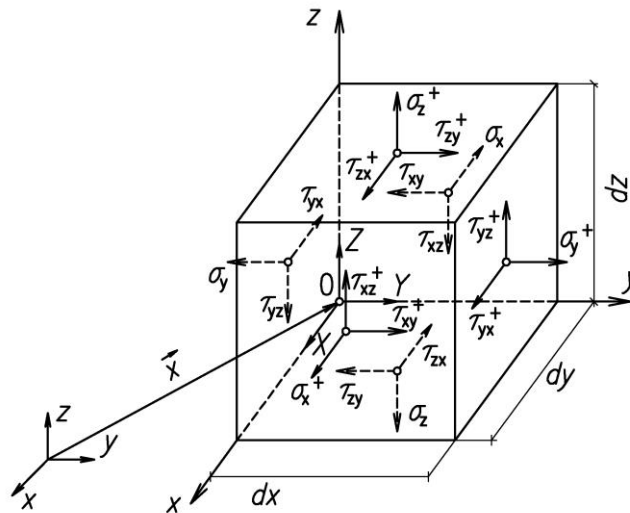
$$\int_{(A)} \sigma_{ij} n_j dA = \int_{(V)} \sigma_{ij,j} dV \quad \text{dla } i = x, y, z. \quad (3.14)$$

Podstawienie (3.14) do (3.10.2) daje *równania równowagi wewnętrznej* w postaci wskaźnikowej:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0. \quad (3.15)$$

Te równania możemy też wyprowadzić w notacji inżynierskiej jako równania równowagi elementarnego sześcianu o długości boków dx , dy , dz obciążonego naprężeniami i wektorem sił masowych $\vec{X} dV$.

Na Rys.3.5 pokazano elementarny sześcian w polu sił masowych i sił wewnętrznych (naprężeń).



Rys.3.5. Elementarny sześcian w polu naprężeń i sił masowych.

Elementarny sześcian jest poddany działaniu pól sił masowych i sił wewnętrznych (naprężeń) o intensywnościach pokazanych na Rys. 3.5. Przeciwległe ścianki są odsunięte na elementarne odległości dx , dy i dz . Dlatego przy przejściu od ścianek przechodzących przez punkt 0 (x , y , z) do przeciwległych ścianek mogą występować zmiany intensywności sił wewnętrznych. Pokazujemy to na przykładzie naprężenia $\sigma_x^+ = \sigma_x(\bar{x} + d\bar{x})$. Korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora i zachowując tylko liniowy przyrost otrzymujemy:

$$\sigma_x^+ = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx. \quad (3.16)$$

Tak samo liczymy przyrosty pozostałych naprężeń.

Stan równowagi elementarnego sześcianu określa 6 równań równowagi sił i momentów:

$$\Sigma_x = 0, \quad \Sigma_y = 0, \quad \Sigma_z = 0, \quad (3.17)$$

$$\Sigma M_x = 0, \quad \Sigma M_y = 0, \quad \Sigma M_z = 0.$$

Najpierw skorzystamy z równania równowagi momentów $\Sigma M_z = 0$ sił liczonych względem prostej równoległej do osi z i przechodzącej przez punkt 0 :

$$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx) dy dz dx - (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx dz dy + - (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dy dz \frac{dx}{2} + \sigma_x dy dz \frac{dx}{2} + .$$

+ dalsze zerujące się człony rzędu 3-ciego .

Zachowując niezerujące się człony 3. rzędu małości otrzymujemy równanie równowagi momentów $\Sigma M_z = 0$ w postaci:

$$(\tau_{xy} - \tau_{yx}) dx dy dz = 0, \quad (3.18.1)$$

Przyjmujemy, że element objętościowy $dV = dx dy dz \neq 0$ skąd otrzymujemy równość naprężeń stycznych dla przekrojów wzajemnie prostopadłych. Obowiązuje ono dla wszystkich naprężeń stycznych

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}} \quad \text{lub} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{dla} \quad i \neq j, \quad \text{gdzie} \quad x, y, z \quad \text{albo} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.18)$$

Zależności (3.18) dowodzą, że *tensor naprężeń* T_σ *jest symetryczny*. Symetria tego tensora powoduje, że tylko 6 naprężeń jest niezależnych.

3.6. Równania statyki TS

Z równań równowagi (3.17) otrzymujemy trzy równania równowagi sił:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned}} \quad (3.20)$$

Równania (3.20) nazywa się czasami *równaniami statyki TS* (równania Naviera), gdyż opisują one odkształcalność ciała C wywołaną wektorowym polem przemieszczeń $\vec{u}(\vec{x})$, które są wywoływane przez obciążenia (siły) przykładane „statycznie” do ciała lub przemieszczenia określonych obszarów (punktów) ciała C . Istotą równań statyki jest ich niezależność od czasu, tzn. ciało C może znajdować się w spoczynku lub poruszać się ze stałą prędkością.

Równania statyki możemy łatwo rozszerzyć na *równania dynamiki* przez uwzględnienie sił bezwładności $\vec{b}(\vec{x}, t) = -\rho \partial^2 \vec{u} / \partial t^2$. Dla skrócenia zapisu posłużono się notacją wskaźnikową:

$$\sigma_{i,j,j} + X_i = \rho u_{i,tt}. \quad (3.21)$$

Równania statyki są *liniowymi równaniami różniczkowymi rzędu pierwszego* (równania eliptyczne). Po ich całkowaniu musimy jeszcze obliczyć wartości stałych całkowania (funkcji w przypadku równań różniczkowych cząstkowych) celem otrzymania jednoznacznych rozwiązań. W przypadku równań statyki (3.15) lub (3.20) dołączamy do nich równania równowagi czworościanu (3.13) jako tzw. naprężeniowe warunki brzegowe. Łącząc równania równowagi wewnętrznej (3.20) z warunkami brzegowymi (3.13) otrzymujemy model matematyczny nazywany *zagadnieniem brzegowym TS*.

W przypadku równań dynamiki TS formułujemy zagadnienia początkowo-brzegowe przez dodanie do równań równowagi wewnętrznej (3.21) warunków brzegowych (3.13) oraz warunków początkowych, określających przemieszczenia i prędkości każdego punktu ciała C dla początkowego czasu t_0 (w szczególności $t_0 = 0$), tzn.:

$$\bar{u}_0 = \bar{u}(\bar{x}, t_0), \quad \bar{v}_0 = \partial \bar{u} / \partial t \Big|_{\bar{x}, t_0}. \quad (3.22)$$

3.7. Właściwości tensora naprężeń

Zdefiniowane naprężenia, kojarzone z ciałem C, nazywa się czasami *makronaprężeniami*. Ich podstawową właściwością jest *symetria tensora naprężeń* (3.18). Naprężenia też definiuje się na poziomie mikrostruktury ciała stałego (już nie typu C). *Mikronaprężenia* na poziomie „mikro” mogą być definiowane za pomocą też tensorów naprężeń, ale tensorów niesymetrycznych. W dalszym ciągu zajmujemy się wyłącznie tensorami symetrycznymi.

Oprócz podstawowego atrybutu tensora jakim jest prawo transformacji współrzędnych, tensor naprężeń jest symetryczny co wpływa na jego wyróżnione kierunki transformacji i podział tensora T_σ na tensory składowe, którymi posługujemy się w opisie stanu naprężeń.

3.7.1. Naprężenia główne

Szczególnym przypadkiem transformacji wyjściowego układu współrzędnych (x, y, z) są takie obroty aby znikły naprężenia styczne. Wtedy na ściankach sześcianu pozostają jedynie naprężenia normalne σ_j (a więc $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) nazywane *naprężeniami głównymi*.

Zajmijmy się równaniami czworościanu i naprężeniami na ściance o normalnej \bar{n} (por. Rys.3.6), która ma dostawy kierunkowe n_x, n_y, n_z . Na ściance występuje wektor naprężeń $\vec{\sigma}^{(n)}$ o długości σ_N , który ma lokalne współrzędne σ_{mn} oraz τ_N , a więc zachodzi:

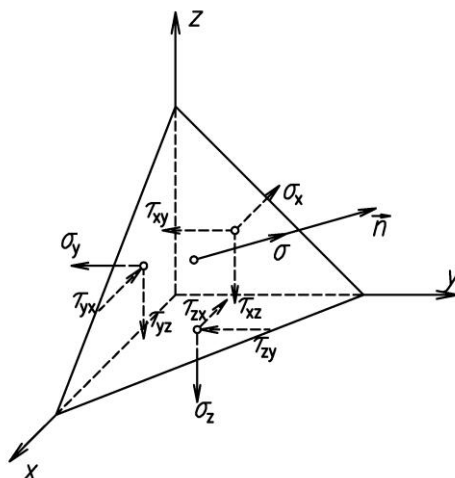
$$\sigma_N^2 = \sigma_{mn}^2 + \tau_N^2 \quad (3.23)$$

Na Rys.3.6. pokazano wszystkie naprężenia działające na czworościan.

Przyjmujemy, że na ściance o normalnej $\bar{n} (n_x, n_y, n_z)$ występuje naprężenie główne $\sigma_{mn} = \sigma$, tzn. $\tau_N = 0$ a naprężenia równoległe do osi układu wynoszą:

$$\sigma_{nx} = \sigma n_x, \quad \sigma_{ny} = \sigma n_y, \quad \sigma_{nz} = \sigma n_z. \quad (3.24)$$

Po podstawieniu σ_{nk} do (3.13.2) i uporządkowaniu względem dostaw n_k otrzymujemy układ 3-ch równań, uzupełniony 4-tym równaniem, wynikającym z ortogonalności osi x_i :



Rys. 3.6: Naprężenia działające na czworościan

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x - \sigma)n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z &= 0, \\
 \tau_{yx}n_x + (\sigma_y - \sigma)n_y + \tau_{yz}n_z &= 0, \\
 \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + (\sigma_z - \sigma)n_z &= 0, \\
 n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

Łatwo możemy napisać układ równań (3.25) za pomocą notacji wskaźnikowej:

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij})n_j = 0, \quad n_i n_j \delta_{ij} = 1.
 \tag{3.25.1}$$

Warunkiem koniecznym istnienia niezerowego rozwiązania układu jednorodnego 3-ch pierwszych równań liniowych (3.25) jest zerowanie wyznacznika głównego tego układu:

$$\begin{vmatrix}
 \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
 \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\
 \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma
 \end{vmatrix} = 0.
 \tag{3.26}$$

Rozwinięcie tego wyznacznika daje równanie stopnia 3-ciego, nazywane *równaniem wiekowym*:

$$\sigma^3 - \sigma^2 J_1 + \sigma J_2 - J_3 = 0,
 \tag{3.27}$$

w którym współczynniki tego równania są *niezmiennikami tensora naprężeń*:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,
 \tag{3.28.1}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix},
 \tag{3.28.2}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (3.28.3)$$

W odniesieniu do naprężeń głównych można udowodnić następujące **twierdzenie 1**:

Trzy pierwiastki równania wiekowego (3.27), tj. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ są liczbami rzeczywistymi (mogą też być krotne, np. $\sigma_1 = \sigma_2$ lub $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$).

Kierunki główne naprężeń głównych określają dostawy kierunkowe

$$(n_{jx}, n_{jy}, n_{jz}) \text{ gdzie } j = 1, 2, 3 \text{ odpowiada kierunkom głównym } \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3. \quad (3.29)$$

Dostawy kierunkowe (3.28) obliczamy z układu równań (3.25), oddzielnie dla każdego naprężenia głównego σ_j . W odniesieniu do kierunków głównych obowiązuje następujące **twierdzenie 2**:

Kierunki główne wyznaczone dostawami kierunkowymi są wzajemnie prostopadłe, tzn. w odniesieniu do nich obowiązują wzory (2.8), w których podstawiamy

$$n_{ji} = a_{ji}, \text{ gdzie } j = j' = 1, 2, 3 \text{ oraz } i = x, y, z. \quad (3.30)$$

Uwaga: Jeszcze raz przypominamy, że poszukiwane kierunki główne odpowiadają takim obrotom osi (x, y, z) do nowego położenia osi kierunków głównych $(1, 2, 3)$, które odpowiadają normalnym $\vec{n}^{(1)}, \vec{n}^{(2)}, \vec{n}^{(3)}$, dla których zerują się naprężenia styczne $\tau_{jx}, \tau_{jy}, \tau_{jz}$.

Tak więc, po obliczeniu wartości naprężeń głównych tensora naprężeń, przyjmuje on postać przekątniową (diagonalna):

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

a jego niezmiennikami są :1) suma wartości naprężeń głównych, 2) suma minorów i 3) wartości wyznacznika macierzy tensora (3.31):

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ J_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\ J_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Po obliczeniu naprężeń głównych poprawność ich wartości możemy sprawdzić za pomocą wzorów (3.32) a kierunków głównych wzorami (2.8).

Naprężenia główne możemy uporządkować według ich wartości

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 . \quad (3.33)$$

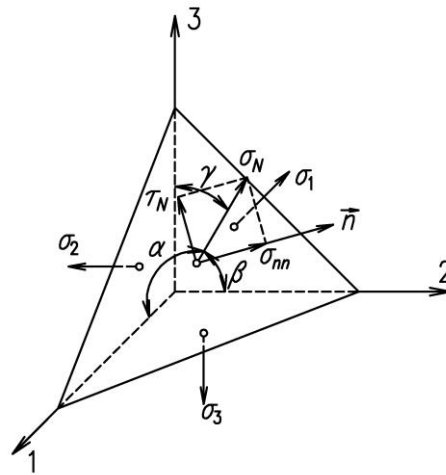
W odniesieniu do uporządkowania obowiązuje **twierdzenie 3**:

Spośród naprężeń normalnych odpowiadających obrotom osi układu ortogonalnego (x, y, z) do kierunków głównych (1,2,3) naprężenia σ_1 i σ_3 z uporządkowania (3.33) przyjmują wartości maksymalnego i minimalnego naprężenia.

3.7.2. Maksymalne naprężenia styczne

Praktyczne znaczenie ma wyznaczanie ekstremalnych (maksymalnych i minimalnych) naprężeń stycznych, oraz przekrojów w których one występują.

Przyjmijmy, że osie układu współrzędnych x, y, z pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych (1,2,3), por. Rys.3.7.



Rys.3.7. Naprężenia na ścianie o normalnej $\vec{n} (n_1, n_2, n_3)$ gdzie (1,2,3) są osiami kierunków naprężeń głównych

Zajmiemy się przekrojem (ścianką czworościanu) o normalnej $\vec{n} (n_1, n_2, n_3)$ i całkowitym naprężeniu σ_N , określonym wzorem wynikającym z (3.8.2). Przyjmujemy taki obrót układu współrzędnych, że zachodzi: $x \rightarrow 1, y \rightarrow 2, z \rightarrow 3$ i $\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2, \sigma_z = \sigma_3, \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. Dla takiego obrotu osi mamy:

$$\sigma_N^2 = \sigma_{n1}^2 + \sigma_{n2}^2 + \sigma_{n3}^2 = (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2 . \quad (3.34)$$

Naprężenie normalne σ_{nn} obliczamy przez rzutowanie naprężeń $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3}$ na kierunek normalnej n :

$$\sigma_{nn} = \sigma_{n1} n_1 + \sigma_{n2} n_2 + \sigma_{n3} n_3 = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 . \quad (3.35)$$

Korzystając z zależności (3.23), (por. też rys. 3.7) obliczamy:

$$\tau_N^2 = \sigma_N^2 - \sigma_{nn}^2 = (\sigma_n^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2) - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2. \quad (3.36)$$

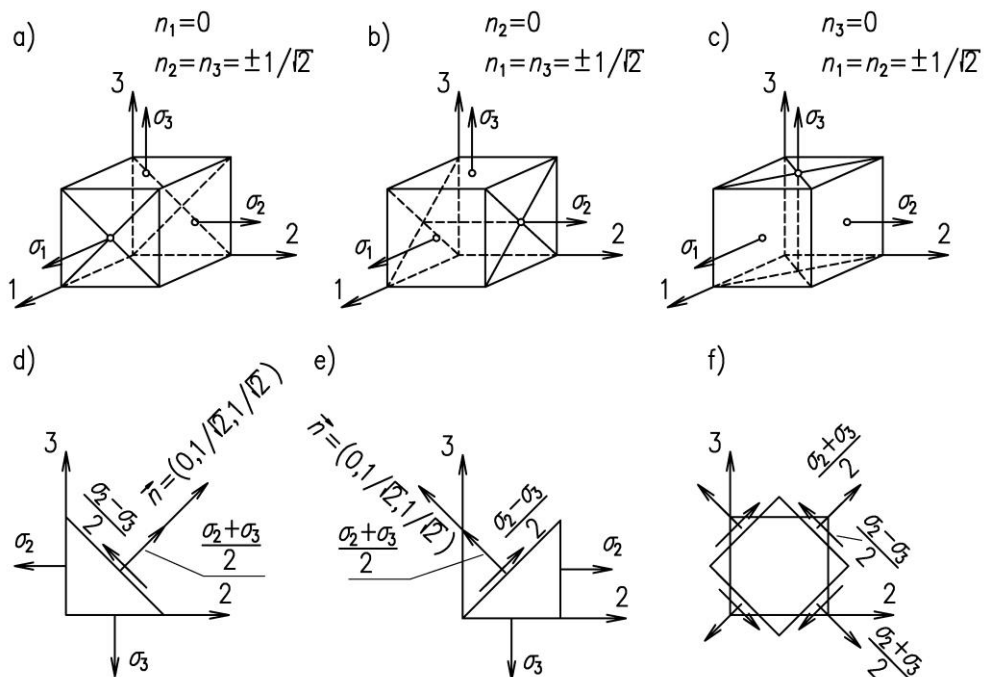
Posługując się równaniem(3.36) oraz warunkiem ortogonalności

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad (3.37)$$

możemy obliczyć z równania $\partial(\tau_N^2)/\partial n_j = 0$ wartości dostaw kierunkowych oraz naprężenia ścinające na 9-ciu przekrojach zestawionych w Tablicy (3.38), por. [8]. Na Rys.3.8 pokazano przekroje IV-IX. Rysunki 3.8d,e,f zostały wykonane dla przekrojów IV i V z podaniem zwrotów naprężeń τ_{23} i naprężeń normalnych σ_{nn} . Należy podkreślić, że naprężenia normalne są jednakowe na ściankach obróconych wokół osi 1 i wynoszą $\sigma_{nn} = (\sigma_2 + \sigma_3)/2$ i σ_1 na ściankach równoległych do płaszczyzny (2,3).

dostawy kier. przekrój	n_1	n_2	n_3	τ_N	σ_{nn}
I	0	0	± 1	0	σ_3
II	0	± 1	0	0	σ_2
II	± 1	0	0	0	σ_1
IV i V	0	$\pm \sqrt{1/2}$	$\pm \sqrt{1/2}$	$\tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$	$\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$
VI i VII	$\pm \sqrt{1/2}$	0	$\pm \sqrt{1/2}$	$\tau_{31} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$	$\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}$
VIII i IX	$\pm \sqrt{1/2}$	$\pm \sqrt{1/2}$	0	$\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$	$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$

Tablica (3.38)

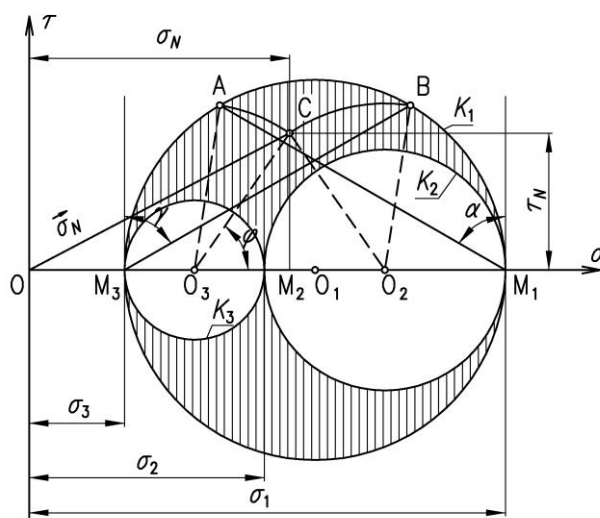


Rys. 3.8: a, b c) Naprężenia na ściankach odpowiadających przekrojom IV i V, VI i VII oraz VIII i IX; d, e, f) Naprężenia τ_{23} i σ_{nn} dla przekrojów IV i V

Na Rys.3.8 pokazano przekroje IV-IX. Rysunki 3.8d,e,f zostały wykonane dla przekrojów IV i V z podaniem zwrotów naprężeń τ_{23} i naprężeń normalnych σ_{nn} . Należy podkreślić, że naprężenia normalne są jednakowe na ściankach obróconych wokół osi 1 i wynoszą one $\sigma_{nn} = (\sigma_2 + \sigma_3)/2$ i σ_1 na ściankach równoległych do płaszczyzny (2, 3).

3.7.3. Koła Mohra

Jest to konstrukcja geometryczna, pokazana na Rys.3.9, która dla znanych wartości naprężeń głównych oraz dopuszczalnych wartości σ_{nn} oraz τ_N umożliwia wyznaczenie kątów α , β , γ zawartych między kierunkami głównymi 1, 2, 3 oraz naprężeniem całkowitym σ_N , (por. Rys.3.9).



Rys. 3.9. Koła Mohra dla przestrzennego stanu naprężeń

Można udowodnić, por. np. [5], że punkt C oznaczający koniec wektora $\vec{\sigma}^{(n)}$ o długości σ_N i składowych σ_{nn} i τ_N , por. Rys 3.9, może leżeć tylko w obszarze zakreskowanym, ograniczonym trzema kołami o średnicach $\sigma_1 - \sigma_3$, $\sigma_1 - \sigma_2$, $\sigma_2 - \sigma_3$.

3.7.4. Naprężenie na przekrojach równo nachylonych

Zajmiemy się obliczeniem naprężeń na przekroju równo nachylonym względem kierunków głównych, dla których dostawy kierunkowe normalnej \vec{n} przyjmą wartości

$$n_1 = n_2 = n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} . \quad (3.39)$$

Podstawienie (3.38) do wzorów (3.34) i (3.36) daje:

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) , \quad (3.40.1)$$

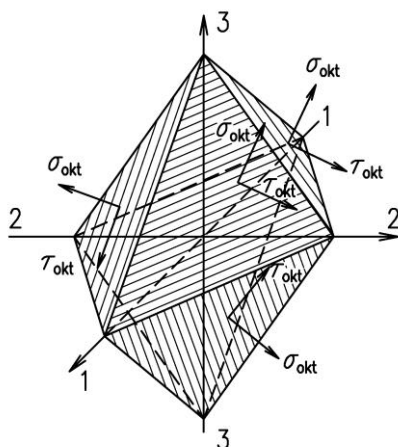
$$\sigma_{nn} \equiv \sigma_{\text{okt}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) , \quad (3.40.2)$$

$$\tau_N \equiv \tau_{\text{okt}} = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (3.40.3)$$

Przekroje równo nachylone tworzą boki ośmiościanu foremnego (oktaedru), pokazanego na Rys. 3.10. Na każdej ścianie ośmiościanu występują takie same *naprężenia oktaedryczne*, tzn. naprężenia normalne (średnie) σ_{okt} i styczne τ_{okt} , określone wzorami (3.40).

W dalszym ciągu będziemy korzystali z oktaedrycznego naprężenia stycznego jako miary wyciężenia materiału oraz jego uplastycznienia. W tym celu wzór (3.40.3) można napisać w postaci:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{okt}} &= \frac{2}{9}(J_1^2 - 3J_2) = \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (3.41)$$



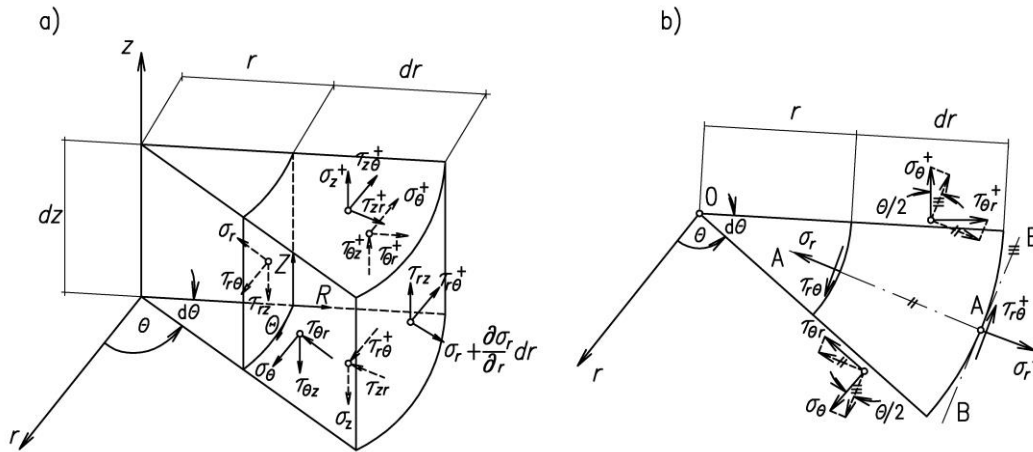
Rys. 3.10. Ośmiościan z naprężeniami oktaedrycznymi σ_{okt} i τ_{okt}

$$\begin{aligned} \tau_{\text{okt}} &= \frac{2}{9}(J_1^2 - 3J_2) = \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

3.8. Równania równowagi wewnętrznej we współrzędnych walcowych

Dotychczas opieraliśmy się na układzie współrzędnych kartezjańskich (x, y, z) . W niektórych zagadnieniach bardziej przydatny jest układ współrzędnych walcowych (r, θ, z) pokazany na Rys. 3.11. Korzystamy z równowagi sił względem dwusiecznej kąta $d\theta$, zaznaczonej na Rys. 3.11b jako linia 0-A:

$$\begin{aligned}
& \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz + \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \\
& - \tau_{\theta r} dr dz \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \sigma_\theta dr \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + \\
& + \left(\tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} dz \right) \frac{1}{2} (r d\theta + (r + dr) d\theta) dr - \tau_{zr} \frac{1}{2} (r d\theta + (r + dr) d\theta) dr + R d\theta dr dz = 0.
\end{aligned}$$



Rys. 3.11 : a) Element walcowy i naprężenia na jego ściankach,
b) Naprężenia na płaszczyźnie \$(r, \theta, dz)\$

Przyjmujemy \$\sin(d\theta/2) \approx d\theta/2\$, \$\cos(d\theta/2) \approx 1\$ oraz zachowujemy człony z mnożnikami \$r d\theta dr dz\$ co daje równanie

$$\left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R \right) r d\theta dr dz = 0$$

i po podzieleniu przez \$r d\theta dr dz\$ dochodzimy do pierwszego równania równowagi. Dwa pozostałe równania równowagi otrzymujemy z warunków zerowania się sił równoległych do linii A-B, pokazany na Rys. 3.11b oraz \$\Sigma_z = 0\$.

Łącznie otrzymujemy trzy równania równowagi wewnętrznej we współrzędnych walcowych:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \theta &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z &= 0.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Tak samo jak w układzie kartezjańskim z równań równowagi momentów wynika symetria tensora naprężeń w układzie współrzędnych walcowych, tzn.:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}, \quad \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}, \quad \tau_{zr} = \tau_{rz}. \tag{3.43}$$